Anhang B

Überblick über die Tests

B.1 Ein-Stichproben-Tests

B.1.1 Tests auf Verteilungsannahmen

- **Shapiro-Wilk-Test**

  Situation: Test auf Normalverteilung

  $H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2)$

  $H_1 : X$ nicht normalverteilt

  Voraussetzungen: X_i i.i.d.

  Bemerkung:

```
> set.seed(45)
> x <- rexp(20)
> shapiro.test(x)
```

- **Kolmogorov-Smirnov-Test**

  Situation: Test auf spezielle Verteilung (stetig)

  $H_0 : \ \forall x : F_X(x) = F_0(x)$

  $H_1 : \exists x : F_X(x) \neq F_0(x)$ oder $\exists x : F_X(x) > F_0(x)$ oder $\exists x : F_X(x) < F_0(x)$

  Voraussetzungen: X_i i.i.d. und die Werte sind nicht merklich gerundet.

  Bemerkung: Der Test gilt so nur, wenn die Parameter nicht geschätzt werden mußten. Eine kleinere Verteilungsfunktion gehört zu größeren Werten.

```
> ks.test(x, pexp)
```

- **χ^2-Anpassungstest**

  Situation: Test auf spezielle Verteilung (diskret)

  $H_0 : P(X = i) = p_i$

  $H_1 : \exists i : P(X = i) \neq p_i$

  Voraussetzungen: X_i i.i.d. multinomialverteilt

  Bemerkung:

```
> x <- sample(c("A", "B", "C"), 30, replace = TRUE, prob = c(0.2,
+     0.3, 0.5))
> x

 [1] "B" "C" "B" "C" "A" "C" "C" "C" "B" "C" "B" "B" "C" "A" "C" "B"
[17] "C" "B" "B" "C" "C" "C" "C" "B" "A" "C" "B" "B" "B" "A"

> table(x)

x
 A  B  C
 4 12 14

> chisq.test(table(x), p = c(1/3, 1/3, 1/3))

        Chi-squared test for given probabilities

data:  table(x)
X-squared = 5.6, df = 2, p-value = 0.06081
```

B.1.2 Tests auf Lage

- **Gausstest**

  Situation: Test auf Mittelwert bei bekannter Varianz

  $H_0 : \mu = \mu_0$

  $H_1 : \mu \neq \mu_0$

  Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$

  Bemerkung: Der Gauss-Test wird sehr selten auf reale Datensätze angewendet, da die Varianz fast nie bekannt ist. Er ist jedoch der wohl am leichtesten theoretisch zu verstehende Test und daher immer noch überall zu finden.

- **Einstichproben t-Test**

  Situation: Test auf Mittelwert bei unbekannter Varianz

  $H_0 : \mu = \mu_0$

  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ oder $\mu > \mu_0$ oder $\mu < \mu_0$

  Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$

  Bemerkung:

```
> x <- rnorm(20, mean = 3, sd = 3.6)
> t.test(x, mu = 3)
> t.test(x, mu = 1, alternative = "greater")
> t.test(x, mu = 1, alternative = "less")
```

- **Binomial Test**

  Situation: Test auf Erfolgswahrscheinlichkeit

  $H_0 : \ p = p_0$

  $H_1 : p \neq p_0$ oder $p > p_0$ oder $p < p_0$

  Voraussetzungen: $X \sim Bi(p, n)$

  Bemerkung:

```
> x <- rbinom(20, 1, prob = 0.3)
> x
> table(x)
> binom.test(sum(x), length(x), p = 0.1, alternative = "greater")
```

- **Vorzeichentest**

  Situation: Test auf bestimmten Median

  $H_0 : F_X(0.5) = m_0$

  $H_1 :\ F_X(0.5) \neq m_0$ oder $F_X(0.5) > m_0$ oder $F_X(0.5) < m_0$

  Voraussetzungen: X_i i.i.d.. Verteilung im Median stetig

  Bemerkung:

```
> x <- rcauchy(20, 4, 1)
> binom.test(table(x <= 4))
> binom.test(table(x <= 2))
```

B.1.3 Tests auf Streuung

- **χ^2-Test auf Varianz**

  Situation: Test auf gegebenen Varianz bei normalverteilten Daten.

  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

  $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ oder $\sigma^2 > \sigma_0^2$ oder $\sigma^2 < \sigma_0^2$

  Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

  Bemerkung:

B.2 Zwei-Stichproben-Tests

B.2.1 Tests auf Verteilungsgleichheit

- **Zwei Stichproben Kolmogorov-Smirnov-Test**

  Situation: Testet die Gleichheit der stetigen Verteilungen der Stichproben

  $H_0 : \forall x : F_X(x) = F_Y(x)$

  $H_1 : \exists x : F_X(x) \neq F_Y(x)$ oder $\exists x : F_X(x) > F_Y(x)$ oder $\exists x : F_X(x) < F_Y(x)$

  Voraussetzungen: X_i und Y_i sind i.i.d. und stetig

  Bemerkung: Ungenau bei Bindungen. Die kleinere Verteilungsfunktion gehört zu größeren Werten.

```
> x <- rcauchy(100, 1, 1)
> y <- rexp(120, 1)
> ks.test(x, y, alternative = "less")
```

- **χ^2-Test auf Verteilungsgleichheit (diskret)**

  Situation: Testet die Gleichheit zweier diskreter Verteilungen.

  $H_0 : p_i = q_i$

  $H_1 : p_i \neq q_i$

  Voraussetzungen: $X_i \sim Mu((p_i))$,$Y_i \sim Mu((q_i))$ i.i.d.

Bemerkung:

```
> x <- sample(c("A", "B", "C"), 30, replace = TRUE, prob = c(0.2,
+     0.3, 0.5))
> y <- sample(c("A", "B", "C"), 20, replace = TRUE, prob = c(0.3,
+     0.6, 0.1))
> chisq.test(cbind(table(x), table(y)))
```

B.2.2 Tests auf Lagegleichheit

- **Zwei-Stichproben-t-Test**

  Situation: Vergleich von Mittelwerten zweier Stichproben bei Normalverteilung und gleicher Varianz

  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

  $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ oder $\mu_X > \mu_Y$ oder $\mu_X < \mu_Y$

  Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ und $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$, i.i.d.

  Bemerkung: Die Normalverteilungsvoraussetzung ist relativ unkritisch, solange keine Ausreißer vorliegen und Verteilung ungefähr normal ist. Die Normalverteilungsvoraussetzung kann mit dem Shapiro-Wilk Test und die Varianzgleichheit mit dem F-Test überprüft werden.

```
> x <- rnorm(10, mean = 2, sd = 4)
> y <- rnorm(10, mean = 3, sd = 4)
> shapiro.test(x)
> shapiro.test(y)
> var.test(x, y)
> t.test(x, y, alternative = "two.sided", var.equal = TRUE)
```

- **Welchs t–Test**

  Situation: Vergleich von Mittelwerten zweier Stichproben bei Normalverteilung und verschiedener Varianz

  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

  $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ oder $\mu_X > \mu_Y$ oder $\mu_X < \mu_Y$

  Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, i.i.d.

  Bemerkung: Die Normalverteilungsvoraussetzung ist relativ unkritisch, solange keine Ausreißer vorliegen und Verteilung ungefähr normal ist.

```
> x <- rnorm(10, mean = 2, sd = 1)
> y <- rnorm(10, mean = 6, sd = 4)
> shapiro.test(x)
> shapiro.test(y)
> var.test(x, y)
> t.test(x, y, alternative = "two.sided")
```

- **Wilcoxen–Rang–Summen–Test**

  Situation: Vergleich der Lage zweier Stichproben mit stetiger Verteilung

  $H_0 : \forall x : F_X(x) = F_Y(x)$

  $H_1 : \forall x : F_X(x) = F_Y(x - c)$ mit $c \neq 0$ oder $c > 0$ oder $c < 0$

  Voraussetzungen: X_i und Y_i sind alle stochastisch unabhängig und die F_X und F_Y sind stetig.

Bemerkung: Es handelt sich um ein rangbasiertes Verfahren. Der Test wird allgemein verwendet um die Lagegleichheit bei nicht normalverteilten Stichproben zu Testen, da die Voraussetzung der Verteilungsgleichheit für die Korrektheit des Tests unkritisch ist. Der Test wird ungenau, wenn gleiche Werte (Bindungen) vorkommen.

```
> x <- rexp(10, 5)
> y <- rnorm(12, 3)
> wilcox.test(x, y)
```

B.2.3 Tests auf Streuungsgleichheit

- **F-Test**

  Situation: Test auf Gleichheit der Varianz bei Normalverteilung

  $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

  $H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ oder $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ oder $\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$

  Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu, \sigma_X^2)$, $Y_i \sim N(\mu, \sigma_Y^2)$

  Bemerkung:

```
> var.test(x, y)
```

- Für nicht normalverteilte Datensätze eignet sich der unter Mehrstichproben-Tests beschriebene **Fligner Test**.

```
> fligner.test(list(x, y))
```

B.3 Gepaarte Tests

Bei gepaarten Tests werden an jedem statistischen Individuum zwei abhänige Wert X_i und Y_i beobachtet. Beobachtungen an den verschiedene Individuen müssen stochastisch unabhängig sein.

B.3.1 Tests auf Lage

- **gepaarter t-Test**

  Situation:

  $H_0 : E[X - Y] = 0$

  $H_1 : E[X - Y] \neq 0$ oder $E[X - Y] > 0$ oder $E[X_i - Y_i] < 0$

  Voraussetzungen: $X_i - Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

  Bemerkung: Dieses normalverteilungsbasierte Verfahren hat Probleme mit Ausreißern in der Differenz.

```
> x <- rnorm(10, mean = 10, sd = 5)
> y <- x + rnorm(10, mean = 0.1, sd = 0.05)
> t.test(x, y, paired = TRUE)
```

- **Wilcoxen-Vorzeichen-Rang-Test**

  Situation: Testet auf eine mittlere Änderung von 0 zwischen beiden Beobachtungen am gleichen Individuum.

  H_0 : Die Verteilung von $X_i - Y_i$ ist symmetrisch um 0.

H_1 : Die Verteilung von $X_i - Y_i$ ist symmetrisch um ein $c \neq 0$ oder $c < 0$ oder $c > 0$

Voraussetzungen: Die Verteilung ist für alle Paare gleich.

Bemerkung: Dieses rangbasierte Verfahren hat Probleme mit Bindungen in den Differenzen.

```
> x <- rcauchy(10, 10, 5)
> y <- x + rcauchy(10, 0.1, 0.05)
> wilcox.test(x, y, paired = TRUE)
```

B.3.2 Tests auf Abhängigkeit

- **Pearson–Korrelationstest**

  Situation: Test auf Pearson-Korrelation gleich 0

  $H_0 : \mathrm{cor}(X, Y) = 0$

  $H_1 : \mathrm{cor}(X, Y) \neq 0$ oder $\mathrm{cor}(X, Y) > 0$ oder $\mathrm{cor}(X, Y) < 0$

  Voraussetzungen: $(X, Y) \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$

  Bemerkung:

```
> x <- rnorm(10)
> y <- rnorm(10)
> cor.test(x, y)
> cor.test(x, y, alternative = "greater")
> cor.test(x, y, alternative = "less")
```

- **Spearman–Korrelationstest**

  Situation: Test auf Spearman-Rang-Korrelation

  H_0 :

  H_1 :

  Voraussetzungen:

  Bemerkung:

```
> x <- rlnorm(10)
> y <- rlnorm(10)
> cor.test(x, y, method = "spearman")
```

- **χ^2-Test auf Unabhängigkeit in Kontingenztafeln**

  Situation: Test auf Unabhängigkeit von kategoriellen Merkmalen

  H_0 : X und Y sind stochastisch unabhängig

  H_1 : X und Y sind stochastisch abhängig

  Voraussetzungen: Die einzelnen Individuen sind stochastisch unabhängig

  Bemerkung: Der p-Wert des Tests wird nur approximativ berechnet. Die Approximation ist schlecht, wenn in einzelnen Zellen der Datentafel unter der Unabhängigkeitsannahme weniger als 3-5 Werte zu erwarten sind.

```
> x <- sample(c("A", "B", "C"), 40, TRUE, c(0.1, 0.2, 0.7))
> y <- sample(c("U", "V", "W"), 40, TRUE, c(0.5, 0.2, 0.2))
> chisq.test(x, y)
> table(x, y)
> chisq.test(table(x, y))
```

- **Fishers exakter Test**

  Situation: Test auf Unabhängigkeit von 2x2 Kontingenztafeln und dichtomer Merkmale

  H_0 : Die Merkmale sind stochastisch Unabhängig

  H_1 : Die Merkmale sind stochastisch abhängig

  Voraussetzungen: Die Merkmale an verschiedenen statistischen Individuen sind stochastische unabhängig.

  Bemerkung: Im Gegensatz zum χ^2-Test auf Unabhängigkeit wird hier keine Approximation verwendet. Der Test ist also immer dann vorzuziehen, wenn er in der Situation anwendbar ist.

```
> x <- sample(c("A", "B"), 40, TRUE, c(0.3, 0.7))
> y <- sample(c("U", "V"), 40, TRUE, c(0.8, 0.2))
> table(x, y)
> fisher.test(table(x, y))
```

- **Box-Pierce-Test**

  Situation: Test auf Abhängigkeit in einer Zeitreihe

  H_0 : Die X_i sind stochastisch unabhängig

  H_1 : Die X_i sind jeweils vom Vorgänger abhängig

  Voraussetzungen: die X_i sind normalverteilt

  Bemerkung: Dieser Test gehört eigentlich in die Zeitreihenanalyse. Er ist jedoch oft nützlich, um die Unabhängigkeitsannahme in ganz normalen Datensätzen zu widerlegen.

```
> Box.test(rnorm(1000))
```

B.4 Mehrstichproben Tests

B.4.1 Tests auf Gleichheit der Lage

- **Einfache Varianzanalyse**

  Situation: Test auf Gleichheit der Erwartungswerte mehrerer normalverteilter Stichproben.

  $H_0 : \forall g, g' : \mu_g = \mu_{g'}$

  $H_1 : \exists g, g' : \mu_{g_i} \neq \mu_j$

  Voraussetzungen: $X_i \sim N(\mu_{g_i})$ wobei g_i die Gruppenzugehörigkeit des Individuums i beschreibt.

  Bemerkung: Die Varianzanalyse setzt die Gleichheit der Varianz und Normalverteilung voraus.

```
> data(iris)
> anova(lm(Sepal.Length ~ Species, data = iris))
```

Der p-Wert kann unter `P(>F)` abgelesen werden.

- **Kruskal–Wallis–Test**

  Situation: Test auf Gleichheit der Lage mehrerer stetig verteilter Stichproben.

H_0 : Alle Gruppen haben die gleiche Verteilung

H_1 : Die Verteilungen der Gruppen sind gegeneinander verschoben.

Voraussetzungen: Die X_i unabhängig sein.

Bemerkung: Der Kruskal Wallis Test ist ein Rangbasiertes Verfahrung und ist damit potentiell anfällig gegegen zu viele gleiche Messwerte.

```
> kruskal.test(Sepal.Length ~ Species, data = iris)
```

B.4.2 Tests auf Gleichheit der Streuung

- **Bartlett–Test**

Situation: Testet auf gleiche Varianz in mehrere Stichproben

H_0 : Die Varianzen der Stichproben sind gleich

H_1 : Die Varianzen der Stichproben sind nicht alle gleich.

Voraussetzungen: $X_i|G_i \sim N(\mu_{G_i}, \sigma_{G_i})$ stochastisch unabhängig.

Bemerkung: Dieser Test wird oft eingesetzt, um eine Voraussetzung der Varianzanalyse zu überprüfen.

```
> bartlett.test(Sepal.Length ~ Species, data = iris)
```

- **Fligner–Test**

Situation: Testet auf gleiche Streuung in mehreren Stichproben

H_0 : Die Streuungen der Stichproben sind gleich.

H_1 : Die Streuungen der Stichproben sind unterschiedlich.

Voraussetzungen: Die Beobachtungen sind alle stochastisch Unabhängig, stetig verteilt und die Verteilung hängt nur von der Gruppe ab.

Bemerkung:

```
> fligner.test(Sepal.Length ~ Species, data = iris)
```