Stochastik und Statistik

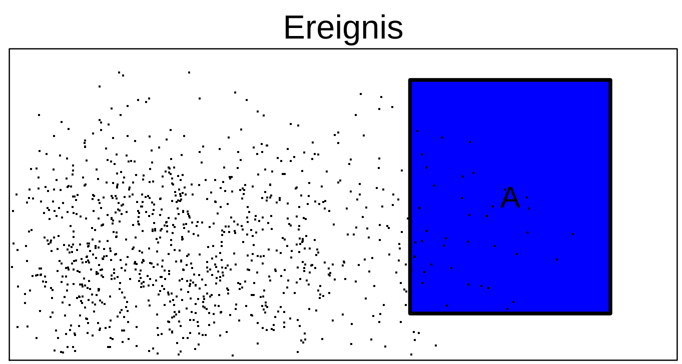
Vorlesung WT 2 Zufallsvariablen und Verteilungen

K.Gerald van den Boogaart
http://www.stat.boogaart.de

Kombinatorik

Motivation

Bei einer Stichprobe zur Qualitätskontrolle werden 4 von 10 Bauteilen überprüft.
Wie wahrscheinlich ist es, dass keine defektes Bauteil untersucht wird, wenn 2 Bauteile defekt waren.



A = Hauptrakete defekt

Motivation

Bei einer Stichprobe zur Qualitätskontrolle werden 4 von 10 Bauteilen überprüft.
Wie wahrscheinlich ist es, dass keine defektes Bauteil untersucht wird, wenn 2 Bauteile defekt waren.

$$P(\text{Defekt gefunden}) = \frac{\text{Anzahl Auswahlmöglichkeiten mit defektem Teil}}{\text{Anzahl Auswahlmöglichkeiten}}$$

Möglichkeiten zählen

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- aus n_1 weiblichen und n_2 männlichen Zwergen eine gemischtes Doppel zusammenzustellen?

Möglichkeiten zählen

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- aus n_1 weiblichen und n_2 männlichen Zwergen eine gemischtes Doppel zusammenzustellen?
- sich aus n_1 weiblichen und n_2 männlichen Zwergen einen Zwerg herauszusuchen?

Möglichkeiten zählen

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- aus n_1 weiblichen und n_2 männlichen Zwergen eine gemischtes Doppel zusammenzustellen?
- sich aus n_1 weiblichen und n_2 männlichen Zwergen einen Zwerg herauszusuchen?
- k mal nacheinander einen der n Zwerge auszusuchen?

Möglichkeiten zählen

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- aus n_1 weiblichen und n_2 männlichen Zwergen eine gemischtes Doppel zusammenzustellen?
- sich aus n_1 weiblichen und n_2 männlichen Zwergen einen Zwerg herauszusuchen?
- k mal nacheinander einen der n Zwerge auszusuchen?
- n Zwerge in eine Reihenfolge zu bringen?

Möglichkeiten zählen

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- aus n_1 weiblichen und n_2 männlichen Zwergen eine gemischtes Doppel zusammenzustellen?
- sich aus n_1 weiblichen und n_2 männlichen Zwergen einen Zwerg herauszusuchen?
- k mal nacheinander einen der n Zwerge auszusuchen?
- n Zwerge in eine Reihenfolge zu bringen?
- k Zwerge aus n Zwergen auszusuchen?

Möglichkeiten zählen

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- aus n_1 weiblichen und n_2 männlichen Zwergen eine gemischtes Doppel zusammenzustellen?
- sich aus n_1 weiblichen und n_2 männlichen Zwergen einen Zwerg herauszusuchen?
- k mal nacheinander einen der n Zwerge auszusuchen?
- n Zwerge in eine Reihenfolge zu bringen?
- k Zwerge aus n Zwergen auszusuchen?
- k Zwerge nacheinander aus n Zwergen auszusuchen?

Möglichkeiten zählen

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- aus n_1 weiblichen und n_2 männlichen Zwergen eine gemischtes Doppel zusammenzustellen?
- sich aus n_1 weiblichen und n_2 männlichen Zwergen einen Zwerg herauszusuchen?
- k mal nacheinander einen der n Zwerge auszusuchen?
- n Zwerge in eine Reihenfolge zu bringen?
- k Zwerge aus n Zwergen auszusuchen?
- k Zwerge nacheinander aus n Zwergen auszusuchen?
- Zwerge aus n Zwergen auszuwählen?

Von denen und von jenen

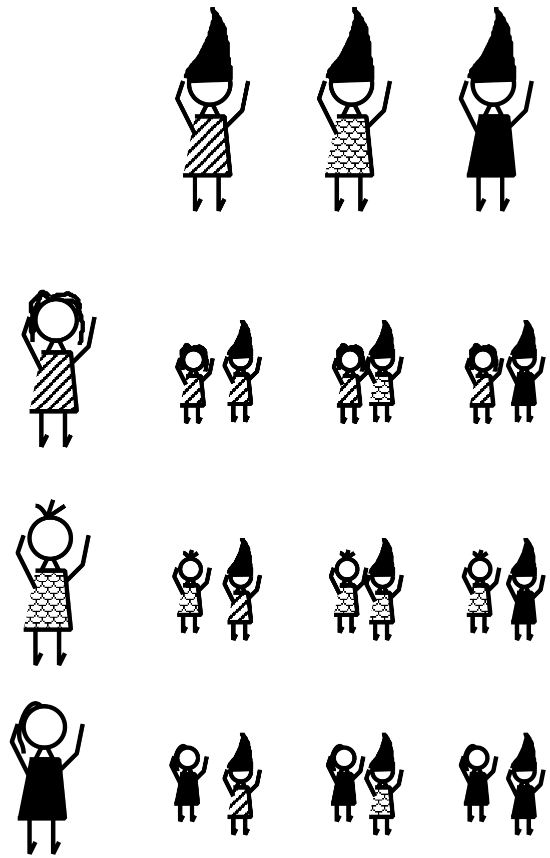
Wieviel Möglichkeiten gibt es

- **aus n_1 weiblichen und n_2 männlichen Zwergen eine gemischtes Doppel zusammenzustellen?**

Von denen und von jenen

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- **aus n_1 weiblichen und n_2 männlichen Zwergen eine gemischtes Doppel zusammenzustellen?**



Von denen und von jenen

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- **aus n_1 weiblichen und n_2 männlichen Zwergen eine gemischtes Doppel zusammenzustellen?**

$$n_{\text{ges}} = n_1 n_2$$

$$n_1 \left\{ \underbrace{\begin{matrix} (1,1) & \cdots & (1,n_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (n_1,1) & \cdots & (n_1,n_2) \end{matrix}}_{n_2} \right.$$

Von denen oder von jenen

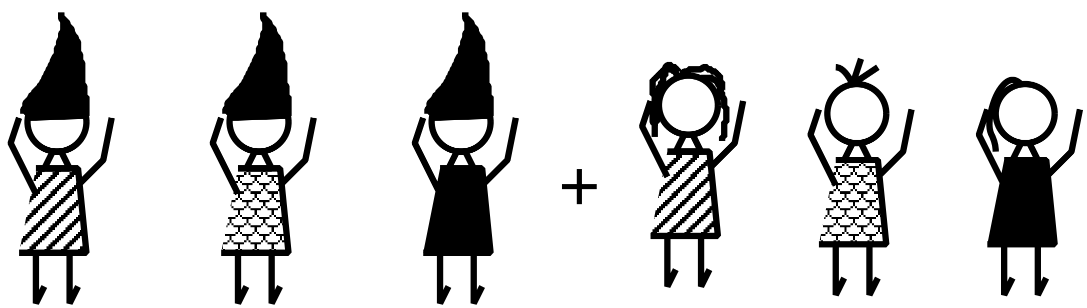
Wieviel Möglichkeiten gibt es

- **sich aus n_1 weiblichen und n_2 männlichen Zwergen einen Zwerg herauszusuchen?**

Von denen oder von jenen

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- **sich aus n_1 weiblichen und n_2 männlichen Zwergen einen Zwerg herauszusuchen?**



Von denen oder von jenen

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- **sich aus n_1 weiblichen und n_2 männlichen Zwergen einen Zwerg herauszusuchen?**

$$n_{\text{ges}} = \left|\{\underbrace{w_1, \ldots, w_{n_1}}_{n_1}, \underbrace{m_1, \ldots, m_{n_2}}_{n_2}\}\right| = n_1 + n_2$$

Variation mit Wiederholung

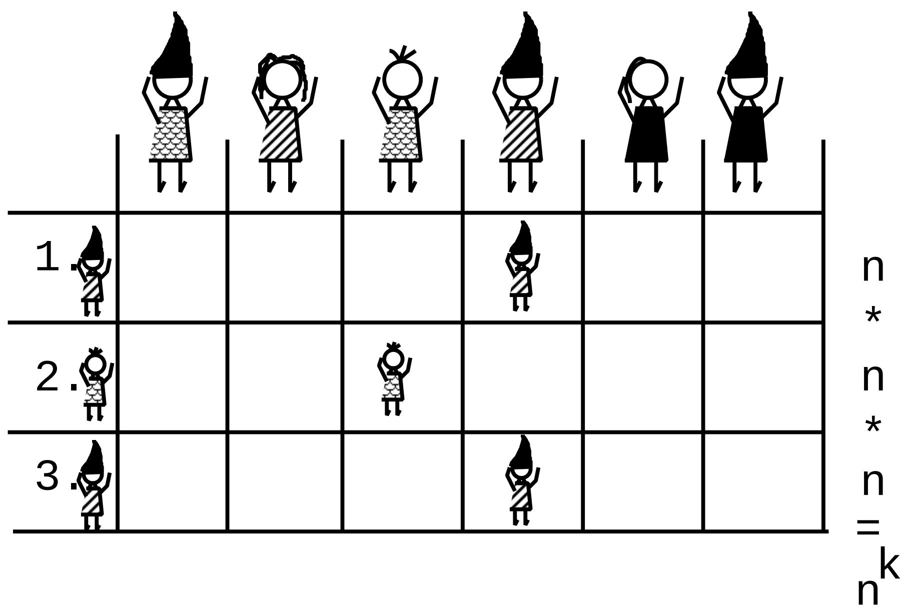
Wieviel Möglichkeiten gibt es

- **k mal nacheinander einen der n Zwerge auszusuchen?**

Variation mit Wiederholung

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- k **mal nacheinander einen der** n **Zwerge auszusuchen?**



Variation mit Wiederholung

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- k **mal nacheinander einen der** n **Zwerge auszusuchen?**

$$n_{\text{ges}} = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k-\text{mal}} = n^k$$

Permutation ohne Wiederholung

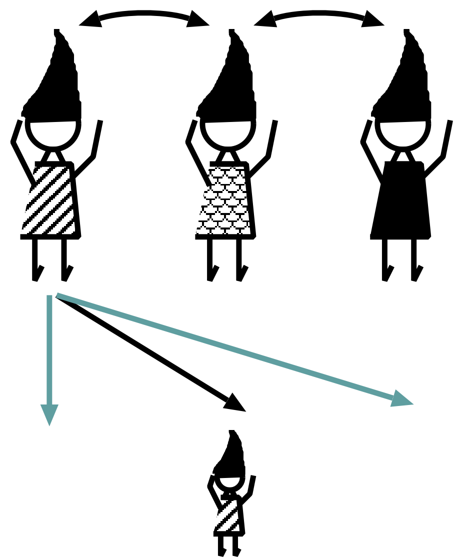
Wieviel Möglichkeiten gibt es

- n **Zwerge in eine Reihenfolge zu bringen?**

Permutation ohne Wiederholung

Wieviel Möglichkeiten gibt es

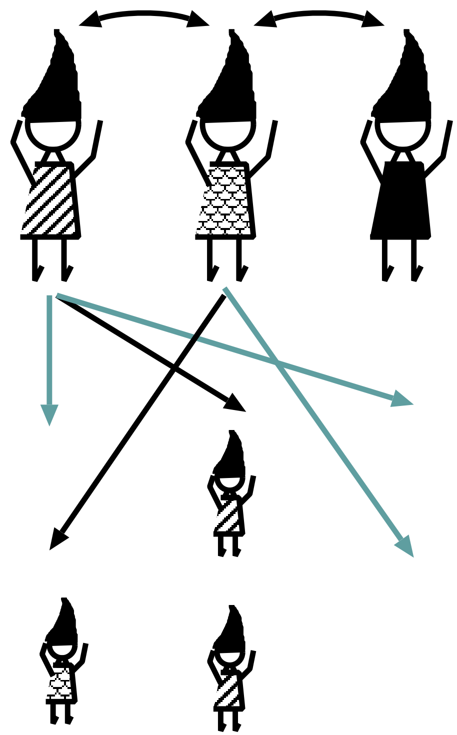
- n **Zwerge in eine Reihenfolge zu bringen?**



Permutation ohne Wiederholung

Wieviel Möglichkeiten gibt es

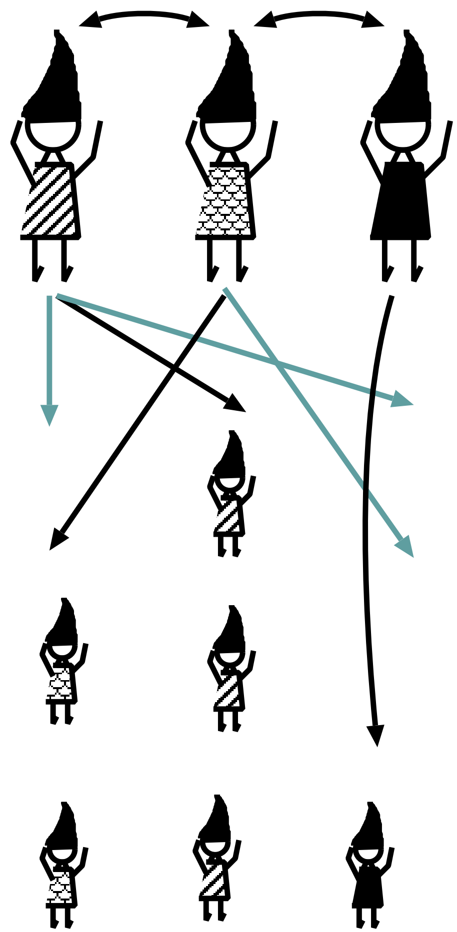
- n **Zwerge in eine Reihenfolge zu bringen?**



Permutation ohne Wiederholung

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- n **Zwerge in eine Reihenfolge zu bringen?**



Permutation ohne Wiederholung

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- **n Zwerge in eine Reihenfolge zu bringen?**

$$n_{\text{ges}} = n(n-1)(n-2)\cdots 1 =: n!$$

n	Möglichkeiten für den 1. Zwerg
$(n-1)$	Möglichkeiten für den 2. Zwerg
$(n-2)$	Möglichkeiten für den 3. Zwerg
$\vdots$	$\vdots$
$(n-(n-1))$	Möglichkeiten für den n-ten Zwerg

Fakultät

Def: Das Rechensymbol “!”

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

bezeichnet die **Fakultät** einer Zahl.
Spezialfälle:

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24 \ \dots$$

Anwendung: Anzahl der Anordungsmöglichkeiten von n Dingen.

Variation ohne Wiederholung

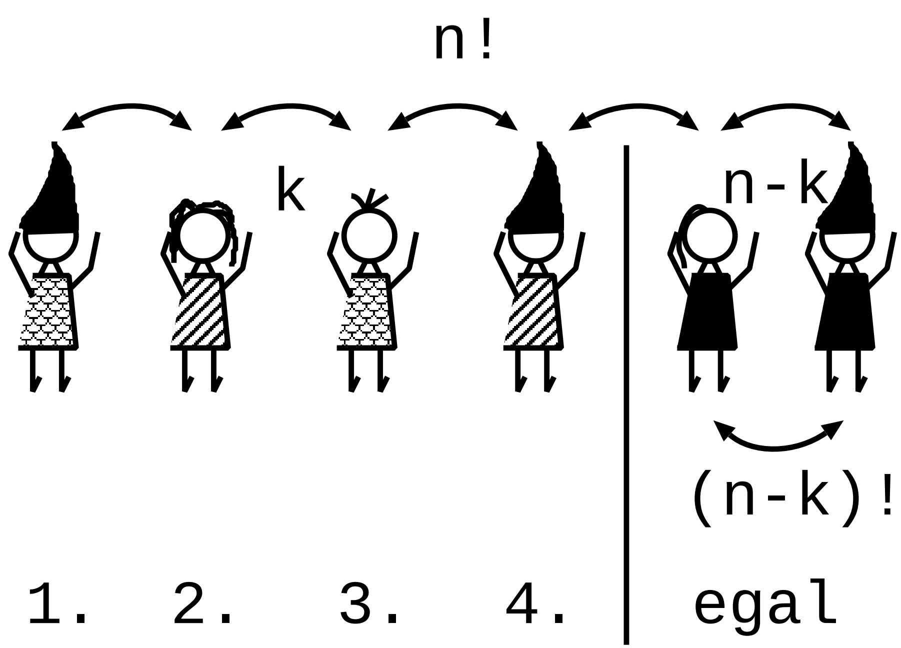
Wieviel Möglichkeiten gibt es

- **k Zwerge nacheinander aus n Zwergen auszusuchen?**

Variation ohne Wiederholung

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- **k Zwerge nacheinander aus n Zwergen auszusuchen?**



Variation ohne Wiederholung

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- k **Zwerge nacheinander aus** n **Zwergen auszusuchen?**

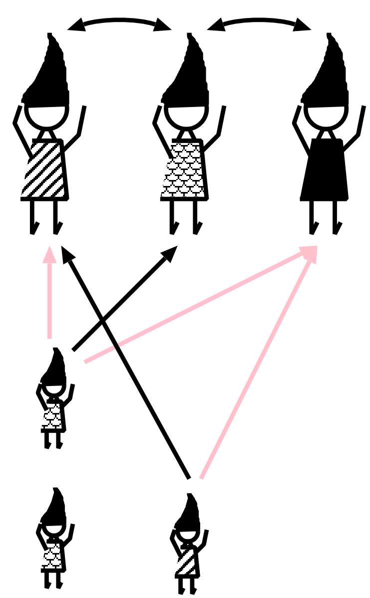
$$n_{\text{ges}} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) =: \frac{n!}{(n-k)!}$$

Variation ohne Wiederholung

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- k **Zwerge nacheinander aus** n **Zwergen auszusuchen?**

$$n_{\text{ges}} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) =: \frac{n!}{(n-k)!}$$

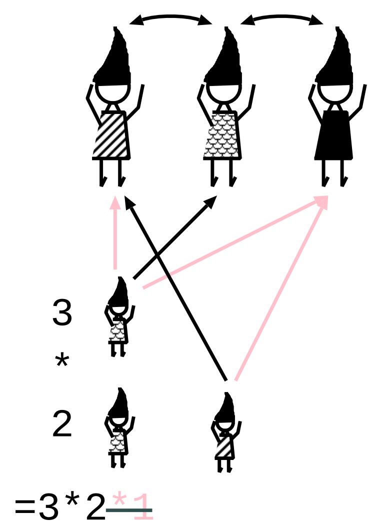


Variation ohne Wiederholung

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- k **Zwerge nacheinander aus** n **Zwergen auszusuchen?**

$$n_{\text{ges}} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) =: \frac{n!}{(n-k)!}$$



Variation ohne Wiederholung

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- k **Zwerge nacheinander aus** n **Zwergen auszusuchen?**

$$n_{\text{ges}} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) =: \frac{n!}{(n-k)!}$$

n	Möglichkeiten für den 1. Zwerg
$(n-1)$	Möglichkeiten für den 2. Zwerg
$(n-2)$	Möglichkeiten für den 3. Zwerg
$\vdots$	$\vdots$
$(n-(k-1))$	Möglichkeiten für den k-ten Zwerg

Kombination ohne Wiederholung

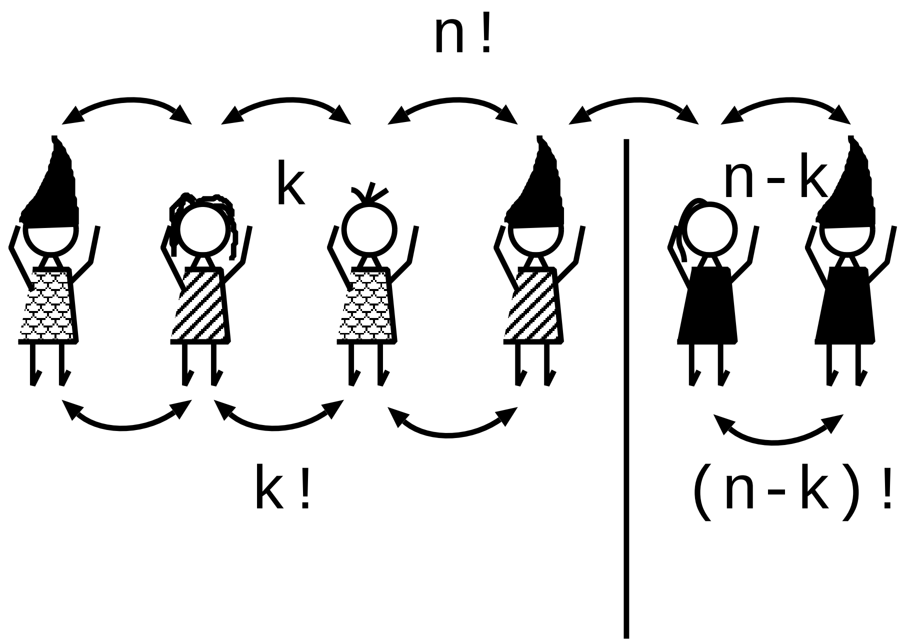
Wieviel Möglichkeiten gibt es

- k **Zwerge aus** n **Zwergen auszusuchen?**

Kombination ohne Wiederholung

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- k **Zwerge aus** n **Zwergen auszusuchen?**



Kombination ohne Wiederholung

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- k **Zwerge aus** n **Zwergen auszusuchen?**
  Es gibt $k!$ Möglichkeiten die k ausgesuchten Zwerge in eine Reihenfolge zu bringen.
  Also wird jede Möglichkeit die k-Zwerge auszusuchen von der Formel $\frac{n!}{(n-k)!}$ dann $k!$-mal gezählt:

$$n_{\text{ges}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$

Binomialkoeffizient

Def: Das Rechensymbol

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

wir als **Binomialkoeffizient** bezeichnet und als

$$k \text{ aus } n$$

gelesen.
Spezialfälle:

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \ldots$$

Anwendung: Anzahl Auswahlmöglichkeiten von k aus n Dingen

Teilmengen

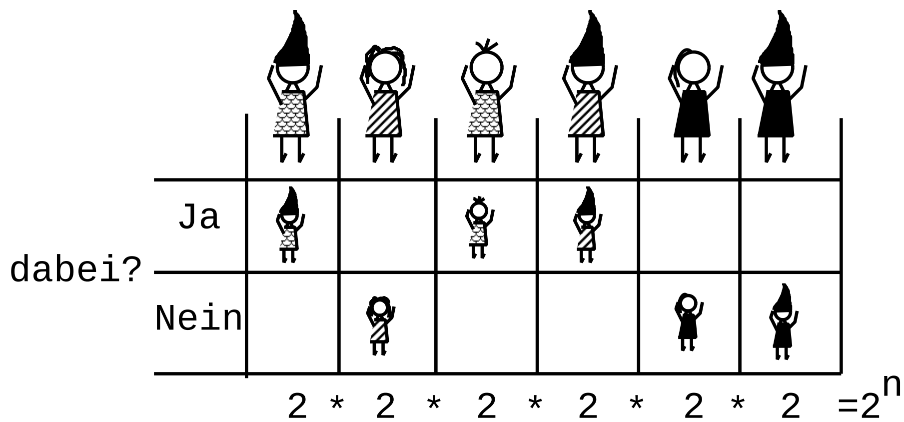
Wieviel Möglichkeiten gibt es

- **Zwerge aus n Zwergen auszusuchen?**

Teilmengen

Wieviel Möglichkeiten gibt es

- **Zwerge aus n Zwergen auszusuchen?**



Wie lernt man das?

- diese Woche noch!!!
- mit einer Packung Smarties oder bunten Büroklammern.
- 10. Klasse aber schon vergessen?
- in der Vorlesung trivial, im Testat vergessen!!!

Wozu benutzt man das?

z.B. bei der Binomialverteilung:
Wieviele Möglichkeiten gibt es um zwei (kaputte) Triebwerke aus 4 Triebwerken auszusuchen?

$$\text{Antwort:} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

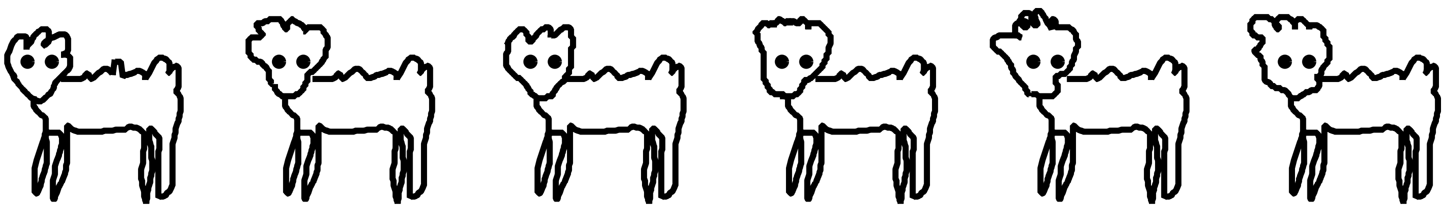
Wie wahrscheinlich ist es das genau diese zwei kaputt sind:

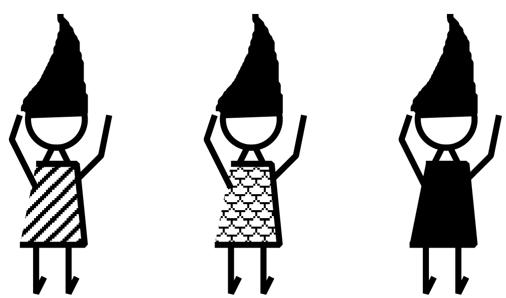
$$p \cdot p \cdot (1-p) \cdot (1-p)$$

Also insgesamt:

$$P(\text{genau zwei Triebwerke kaputt}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} p^2 (1-p)^{4-2}$$

Jetzt wollen wir Schafe aufteilen





Schafe

Wieviele Möglichkeiten gibt es:

- n-Schafe auf k Zwerge aufzuteilen?
- n-Schafe auf k Zwerge so aufzuteilen, dass Zwerg i genau n_i Schafe bekommt.
- n-Eier auf k Zwerge so aufzuteilen, dass Zwerg i genau n_i Eier bekommt.
- n-Eier auf k Zwerge aufzuteilen?

Zerlegung

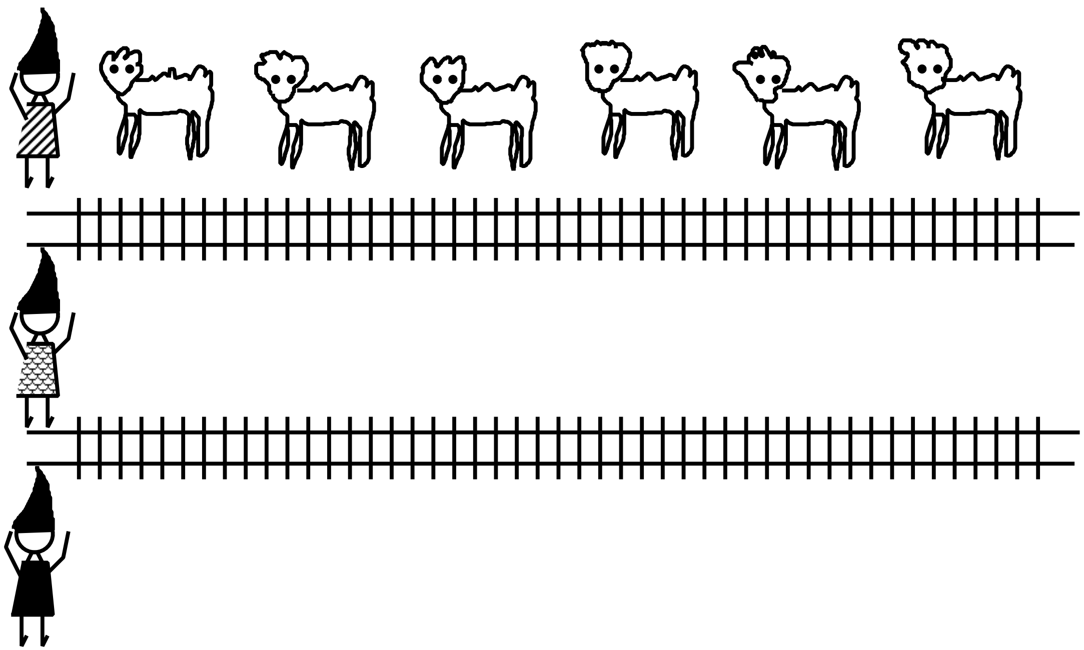
Wieviele Möglichkeiten gibt es:

- n-Schafe auf k Zwerge aufzuteilen (wenn ich die Schafe kenne)?

Zerlegung

Wieviele Möglichkeiten gibt es:

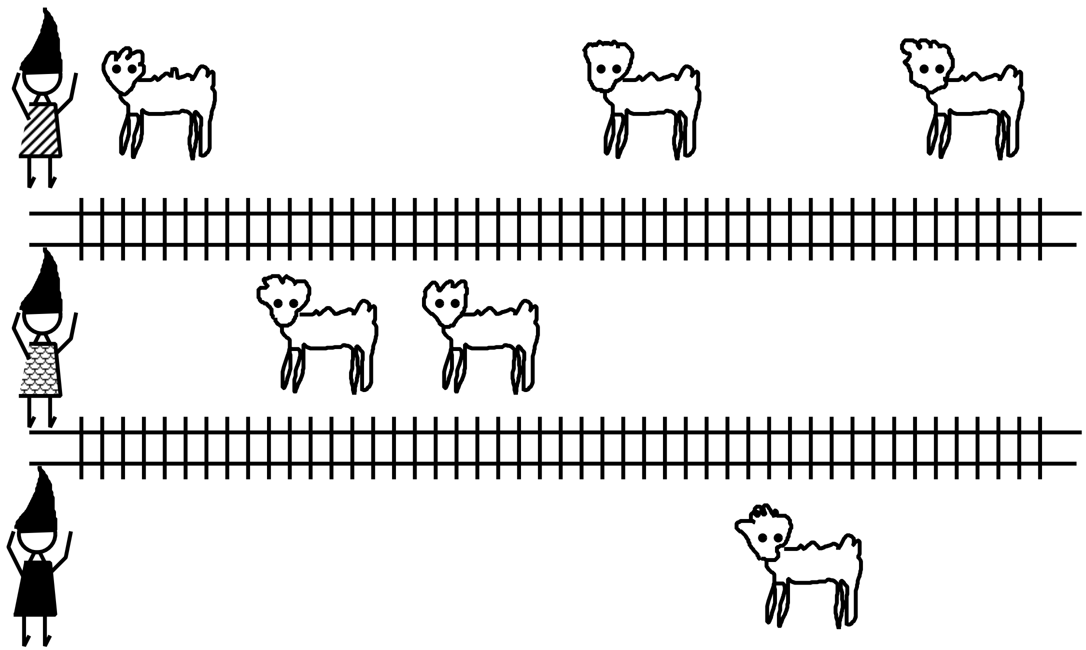
- n-Schafe auf k Zwerge aufzuteilen (wenn ich die Schafe kenne)?



Zerlegung

Wieviele Möglichkeiten gibt es:

- n-Schafe auf k Zwerge aufzuteilen (wenn ich die Schafe kenne)?



Zerlegung

Wieviele Möglichkeiten gibt es:

- n-Schafe auf k Zwerge aufzuteilen (wenn ich die Schafe kenne)?

$$n_{\text{ges}} = k^n$$

Permutation mit Wiederholung

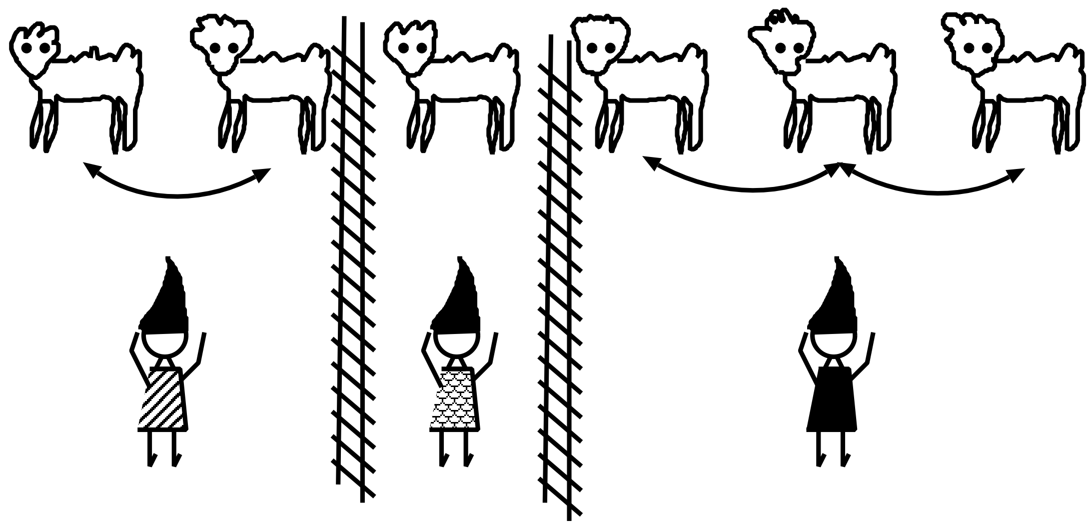
Wieviele Möglichkeiten gibt es:

- n-Schafe auf k Zwerge so aufzuteilen, dass Zwerg i genau n_i Schafe bekommt.

Permutation mit Wiederholung

Wieviele Möglichkeiten gibt es:

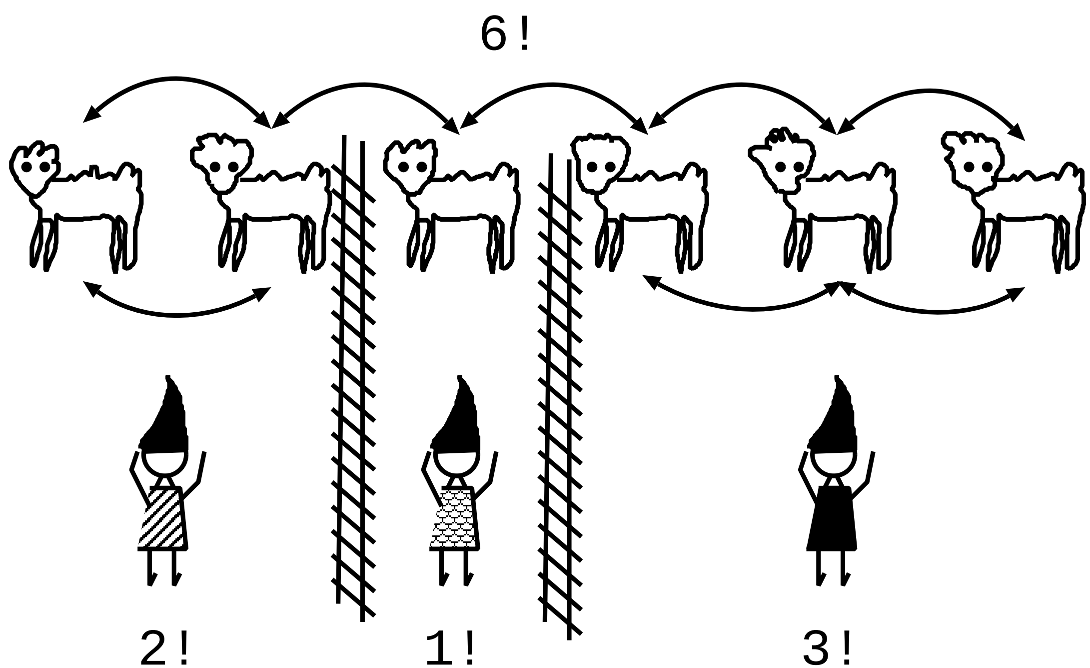
- n-Schafe auf k Zwerge so aufzuteilen, dass Zwerg i genau n_i Schafe bekommt.



Permutation mit Wiederholung

Wieviele Möglichkeiten gibt es:

- n-Schafe auf k Zwerge so aufzuteilen, dass Zwerg i genau n_i Schafe bekommt.



Permutation mit Wiederholung

Wieviele Möglichkeiten gibt es:

- n-Schafe auf k Zwerge so aufzuteilen, dass Zwerg i genau n_i Schafe bekommt.

$$n_{\text{ges}} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} =: \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

Wie ein Ei dem anderen.

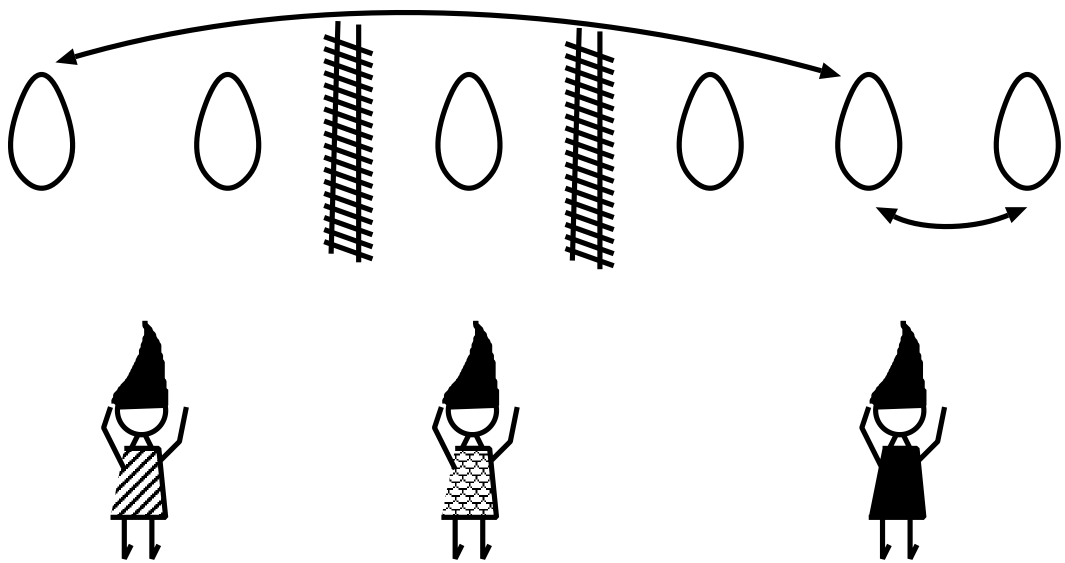
Wieviele Möglichkeiten gibt es:

- n-Eier auf k Zwerge so aufzuteilen, dass Zwerg i genau n_i Eier bekommt.

Wie ein Ei dem anderen.

Wieviele Möglichkeiten gibt es:

- n-Eier auf k Zwerge so aufzuteilen, dass Zwerg i genau n_i Eier bekommt.



Wie ein Ei dem anderen.

Wieviele Möglichkeiten gibt es:

- n-Eier auf k Zwerge so aufzuteilen, dass Zwerg i genau n_i Eier bekommt.

$$n_{\text{ges}} = 1$$

Wie ein Ei dem anderen.

Wieviele Möglichkeiten gibt es:

- n-Eier auf k Zwerge so aufzuteilen, dass Zwerg i genau n_i Eier bekommt.

$$n_{\text{ges}} = 1$$

Kombination mit Wiederholung

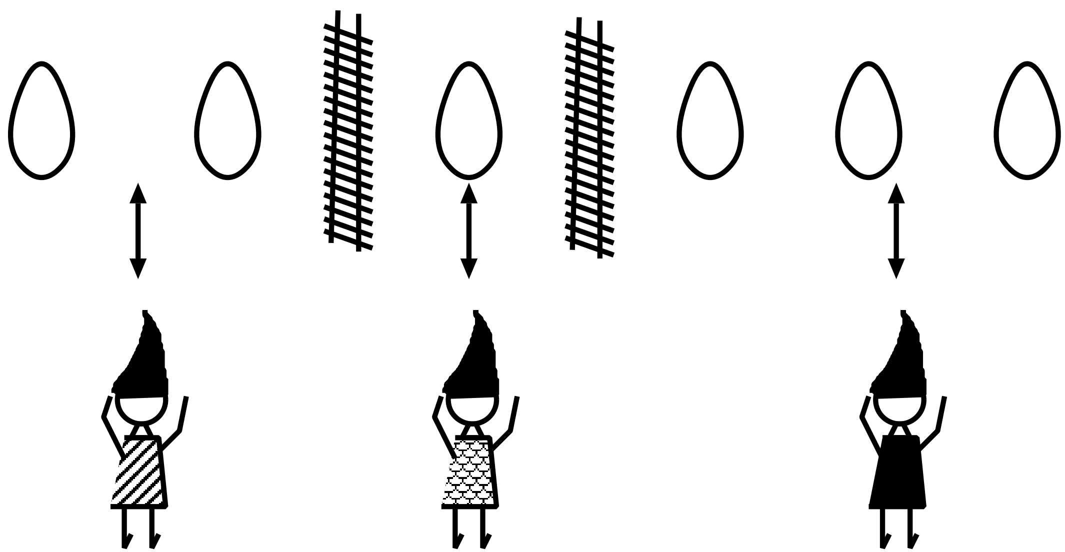
Wieviele Möglichkeiten gibt es:

- n-Eier auf k Zwerge aufzuteilen?

Kombination mit Wiederholung

Wieviele Möglichkeiten gibt es:

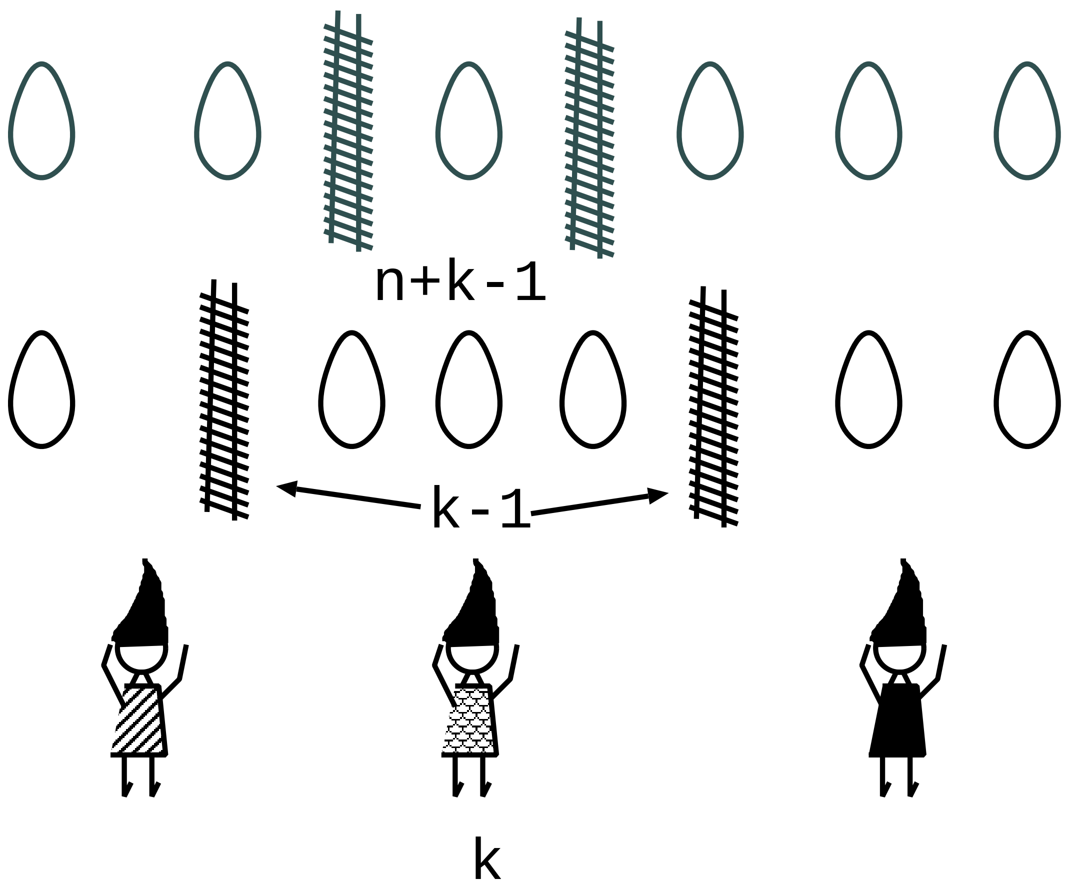
- n-Eier auf k Zwerge aufzuteilen?



Kombination mit Wiederholung

Wieviele Möglichkeiten gibt es:

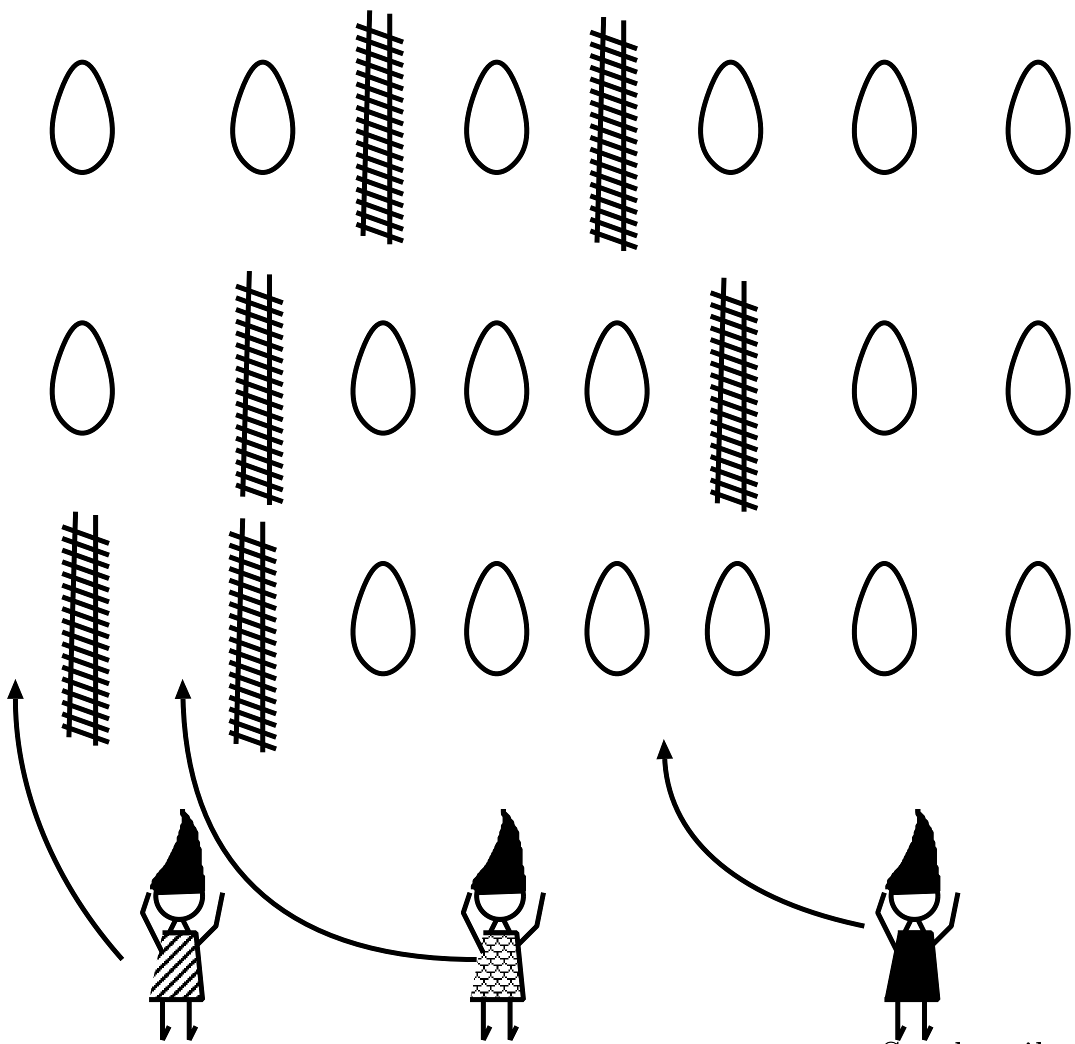
- n-Eier auf k Zwerge aufzuteilen?



Kombination mit Wiederholung

Wieviele Möglichkeiten gibt es:

- n-Eier auf k Zwerge aufzuteilen?



Kombination mit Wiederholung

Wieviele Möglichkeiten gibt es:

- n-Eier auf k Zwerge aufzuteilen?

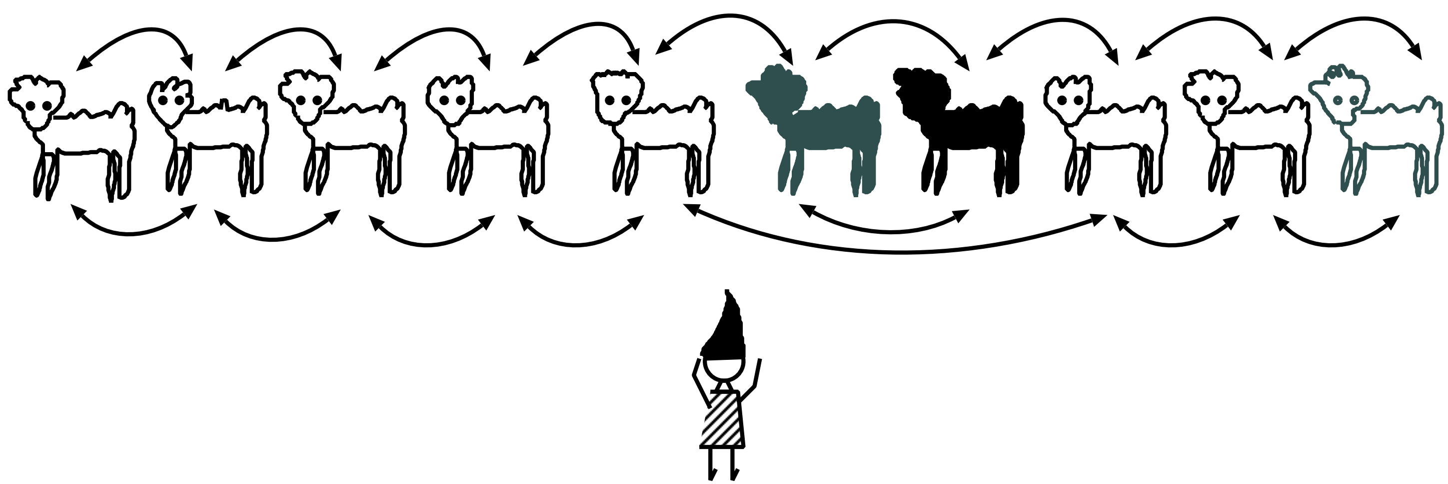
$$n_{\text{ges}} = \binom{n+k-1}{n}$$

Beispiel I Kombinatorik

- Bei einer Stichprobe zur Qualitätskontrolle werden 4 von 10 Bauteilen überprüft. (2 defekt)

Beispiel I Kombinatorik

- Bei einer Stichprobe zur Qualitätskontrolle werden 4 von 10 Bauteilen überprüft. (2 defekt)
- Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass 2 der 10 Bauteile kaputt sind?



Beispiel I Kombinatorik

- Bei einer Stichprobe zur Qualitätskontrolle werden 4 von 10 Bauteilen überprüft. (2 defekt)
- Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass 2 der 10 Bauteile kaputt sind?

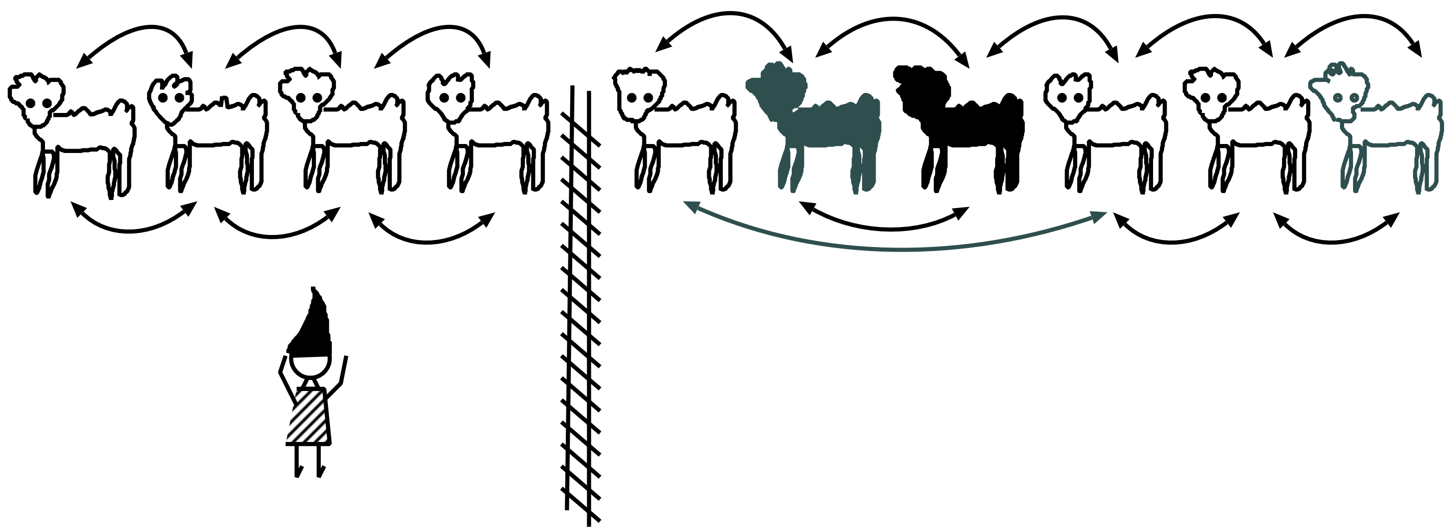
$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$$

Beispiel I Kombinatorik

- Bei einer Stichprobe zur Qualitätskontrolle werden 4 von 10 Bauteilen überprüft. (2 defekt)
- Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass 2 der 10 Bauteile kaputt sind? 45
- Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass wir die zwei kaputten nicht ziehen?

Beispiel I Kombinatorik

- Bei einer Stichprobe zur Qualitätskontrolle werden 4 von 10 Bauteilen überprüft. (2 defekt)
- Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass 2 der 10 Bauteile kaputt sind? 45
- Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass wir die zwei kaputten nicht ziehen?



Beispiel I Kombinatorik

- Bei einer Stichprobe zur Qualitätskontrolle werden 4 von 10 Bauteilen überprüft. (2 defekt)
- Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass 2 der 10 Bauteile kaputt sind? 45
- Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass wir die zwei kaputten nicht ziehen?

$$\binom{4}{0}\binom{6}{2} = 1 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

Beispiel I Kombinatorik

- Bei einer Stichprobe zur Qualitätskontrolle werden 4 von 10 Bauteilen überprüft. (2 defekt)
- Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass 2 der 10 Bauteile kaputt sind? 45
- Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass wir die zwei kaputten nicht ziehen?

$$\binom{4}{0}\binom{6}{2} = 1 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

- Wie hoch ist also die Wahrscheinlichkeit kein defektes Teil zu sehen?

Beispiel I Kombinatorik

- Bei einer Stichprobe zur Qualitätskontrolle werden 4 von 10 Bauteilen überprüft. (2 defekt)
- Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass 2 der 10 Bauteile kaputt sind? 45
- Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass wir die zwei kaputten nicht ziehen?

$$\binom{4}{0}\binom{6}{2} = 1 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

- Wie hoch ist also die Wahrscheinlichkeit kein defektes Teil zu sehen?

$$P(\text{kein defektes Teil entdeckt}) = \frac{15}{45} \approx \frac{1}{3}$$

Zufallsvariablen

Zufallsvariablen

- **Zufallsvariable** X
  Eine Wert den es noch gar nicht gibt.

Zufallsvariablen

- **Zufallsvariable** X
  Eine Wert den es noch gar nicht gibt.
- **Wertebereich** Ω_X
  Menge der möglichen Werte von X.

Zufallsvariablen

- **Zufallsvariable** X
  Eine Wert den es noch gar nicht gibt.
- **Wertebereich** Ω_X
  Menge der möglichen Werte von X.
- **Realisierung** x
  Eine Wert der es geworden ist.

Zufallsvariablen

- **Zufallsvariable** X
  Eine Wert den es noch gar nicht gibt.
- **Wertebereich** Ω_X
  Menge der möglichen Werte von X.
- **Realisierung** x
  Eine Wert der es geworden ist.
- **Verteilung** P^X
  Eine Beschreibung aller Wahrscheinlichkeiten, von Ereignissen, die sich als Aussagen über X formulieren lassen.

Zufallsvariablen mit diskrete Verteilungen

Beispiel I:Hauptantrieb der Simplon

Der Hauptantrieb der Simplon besteht aus 4 Raketentriebwerken.

Beispiel I:Hauptantrieb der Simplon

Der Hauptantrieb der Simplon besteht aus 4 Raketentriebwerken.
Mindestens 3 müssen funktionieren, um die Simplon in die Umlaufbahn zu bringen.

Beispiel I:Hauptantrieb der Simplon

Der Hauptantrieb der Simplon besteht aus 4 Raketentriebwerken.
Mindestens 3 müssen funktionieren, um die Simplon in die Umlaufbahn zu bringen.
Zufallsvariable:

$$X = \text{Anzahl der defekten Triebwerke}$$

Beispiel I:Hauptantrieb der Simplon

Der Hauptantrieb der Simplon besteht aus 4 Raketentriebwerken.
Mindestens 3 müssen funktionieren, um die Simplon in die Umlaufbahn zu bringen.
Zufallsvariable:

$$X = \text{Anzahl der defekten Triebwerke}$$

Wertebereich:

$$\Omega_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Beispiel I:Hauptantrieb der Simplon

Der Hauptantrieb der Simplon besteht aus 4 Raketentriebwerken.
Mindestens 3 müssen funktionieren, um die Simplon in die Umlaufbahn zu bringen.
Zufallsvariable:

$$X = \text{Anzahl der defekten Triebwerke}$$

Wertebereich:

$$\Omega_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Skala: Anzahl

Beispiel I:Hauptantrieb der Simplon

Der Hauptantrieb der Simplon besteht aus 4 Raketentriebwerken.
Mindestens 3 müssen funktionieren, um die Simplon in die Umlaufbahn zu bringen.
Zufallsvariable:

$$X = \text{Anzahl der defekten Triebwerke}$$

Wertebereich:

$$\Omega_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Skala: Anzahl
Realisierung: z.B.

$$x = 0$$

Messbare Ereignisse

Def (vereinfacht): Ein Ereignis heißt X-messbar, falls es genügt die Realisierung x von X zu kennen, um zu entscheiden, ob das Ereignis eingetreten ist.

Messbare Ereignisse

Def (vereinfacht): Ein Ereignis heißt X-messbar, falls es genügt die Realisierung x von X zu kennen, um zu entscheiden, ob das Ereignis eingetreten ist.
Solch ein Ereignisse läßt sich durch eine Menge $A \subset \Omega_X$ der Werte beschreiben, bei dem es eintritt.

Messbare Ereignisse

Def (vereinfacht): Ein Ereignis heißt X-messbar, falls es genügt die Realisierung x von X zu kennen, um zu entscheiden, ob das Ereignis eingetreten ist.
Solch ein Ereignisse läßt sich durch eine Menge $A \subset \Omega_X$ der Werte beschreiben, bei dem es eintritt.
Beispiele X-messbarer Ereignisse:

- Hauptantrieb betriebsbereit$= \{0, 1\}$
- Hauptantrieb nicht betriebsbereit$= \{2, 3, 4\}$
- Alle Triebwerke arbeiten $= \{0\}$
- Weniger als drei Triebwerke defekt $= \{0, 1, 2\}$

Verteilung

Die Verteilung P^X von X ist eine Abbildung, die X-messbare Ereignisse auf ihre Wahrscheinlichkeit abbildet:

$$P^X(A) = \text{Wahrscheinlichkeit von } A$$

Probleme:

- Woher bekomme ich P^X?
- Wie beschreibe ich P^X?
- Wie rechne ich P^X aus?

Wie beschreibe ich P^X?

Allgemein: Bei diskreten Verteilungen (d.h. Ω_X ist aufzählbar) genügt es die Wahrscheinlichkeit für einzelne Werte $k \in \Omega_X$ zu kennen:

$$p_k = P(X = k)$$

Diese Werte p_k heißen **Elementarwahrscheinlichkeit.**
z.B.

$$\begin{aligned}
p_0 &= 0.7435 = P(0 \text{ Triebwerke defekt}) \\
p_1 &= 0.2288 = P(1 \text{ Triebwerk defekt}) \\
p_2 &= 0.0264 = P(2 \text{ Triebwerke defekt}) \\
p_3 &= 0.00135 = P(3 \text{ Triebwerke defekt}) \\
p_4 &= 2.6e-05 = P(4 \text{ Triebwerke defekt})
\end{aligned}$$

Wie rechne ich $P^X(A)$ aus?

1. Idee:
Summiere die einzelnen Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Werte von X auf:

$$P^X(A) = \sum_{k \in A} p_k$$

Kennen wir also die **Elementarwahrscheinlichkeiten** für X, so auch die Wahrscheinlichkeit für jedes X-messbare Ereignis.

$$P(H) = p_0 + p_1 = 0.7435 + 0.2288 = 0.9722$$

Woher bekomme ich P^X bzw. p_k

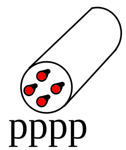
Allgemein:

- Literatur
- Deligieren
- Standardverteilungsmodelle für verschiedene Situationen, mit statistisch geschätzten Parametern.
- Statistische Schätzung
- Stochastische Modellbildung

Modellbildung

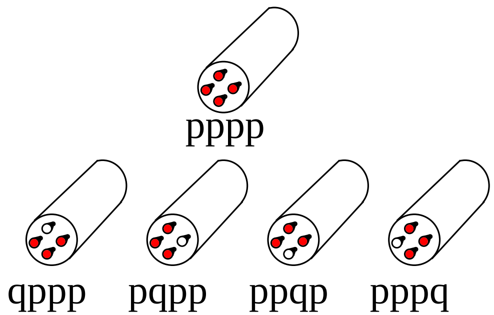
- Jedes Triebwerk fällt mit Wahrscheinlichkeit p aus.
- Annahme: Die Triebwerke fallen unabhängig voneinander aus.
- Also z.B.
  $P(Nur Triebwerk Nr. 1 fällt aus) = p \underbrace{(1-p)}_{q} \underbrace{(1-p)}_{q} \underbrace{(1-p)}_{q}$
- $q = 1 - p = P($Triebwerk A fällt nicht aus.$)$

Binomialverteilung



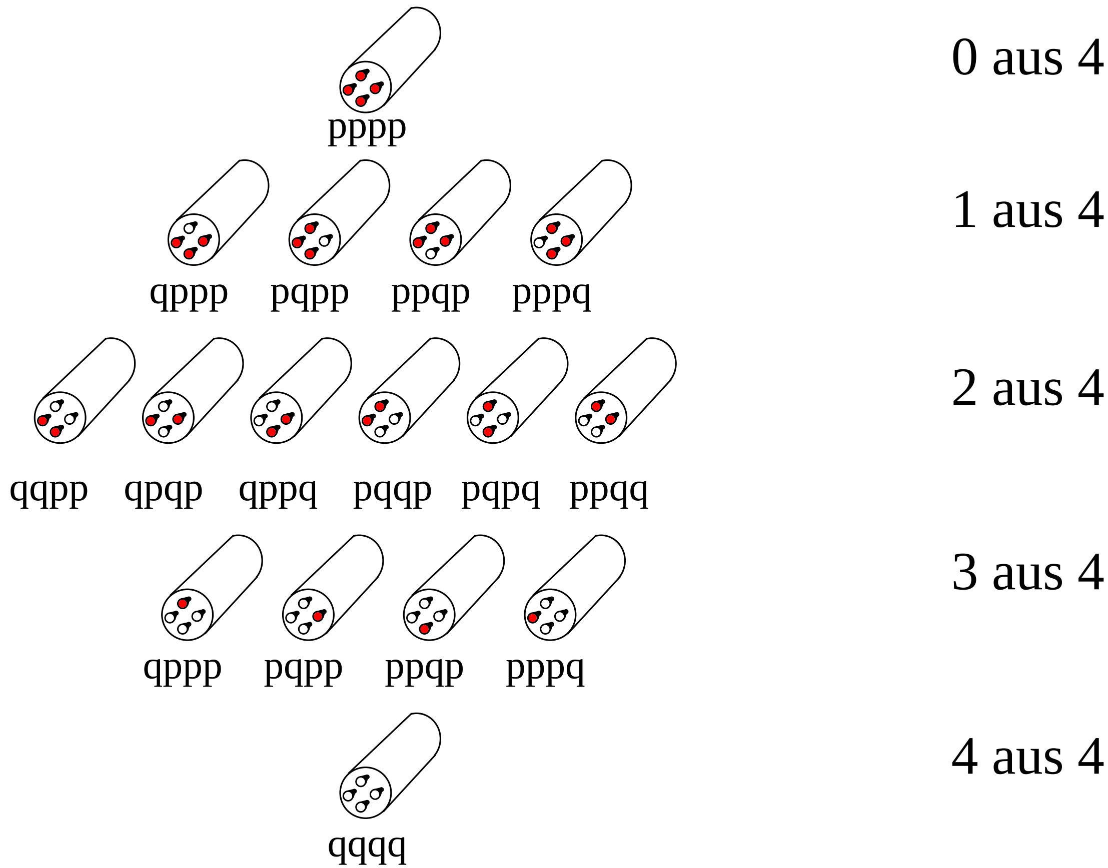
p=P(Triebwerk ok)

Binomialverteilung



p=P(Triebwerk ok)
q=P(Triebwerk defekt)=1-p

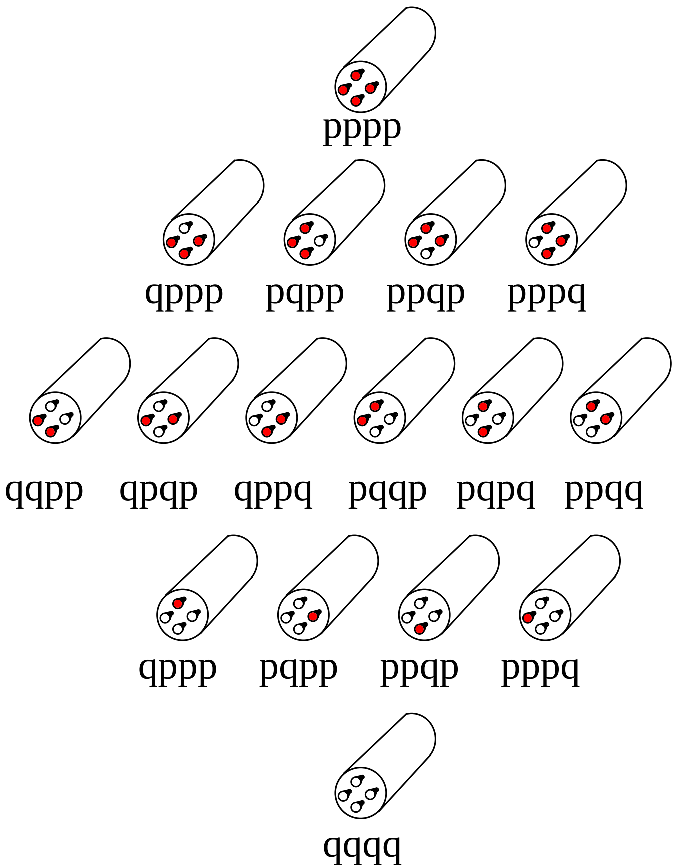
Binomialverteilung



p=P(Triebwerk ok)

q=P(Triebwerk defekt)=1-p

Binomialverteilung



$1\, p^4 q^0$ 0 aus 4

$4\, p^3 q^1$ 1 aus 4

$6\, p^2 q^2$ 2 aus 4

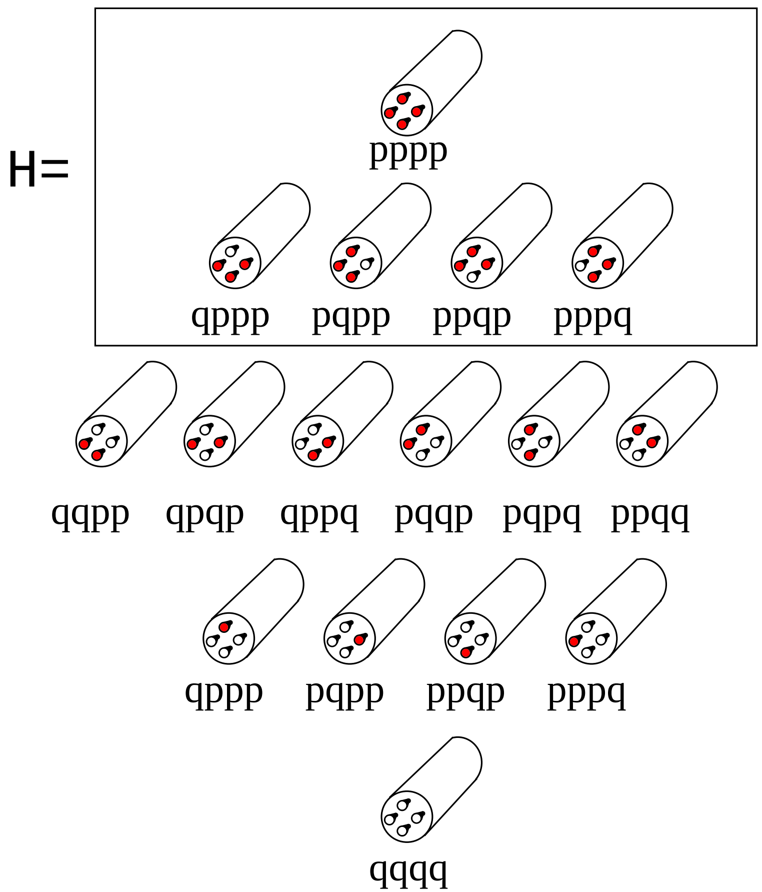
$4\, p^1 q^3$ 3 aus 4

$1\, p^0 q^4$ 4 aus 4

p=P(Triebwerk ok)

q=P(Triebwerk defekt)=1-p

Binomialverteilung



$1\,p^4 q^0$ 0 aus 4

$+$

$4\,p^3 q^1$ 1 aus 4

$6\,p^2 q^2$ 2 aus 4

$4\,p^1 q^3$ 3 aus 4

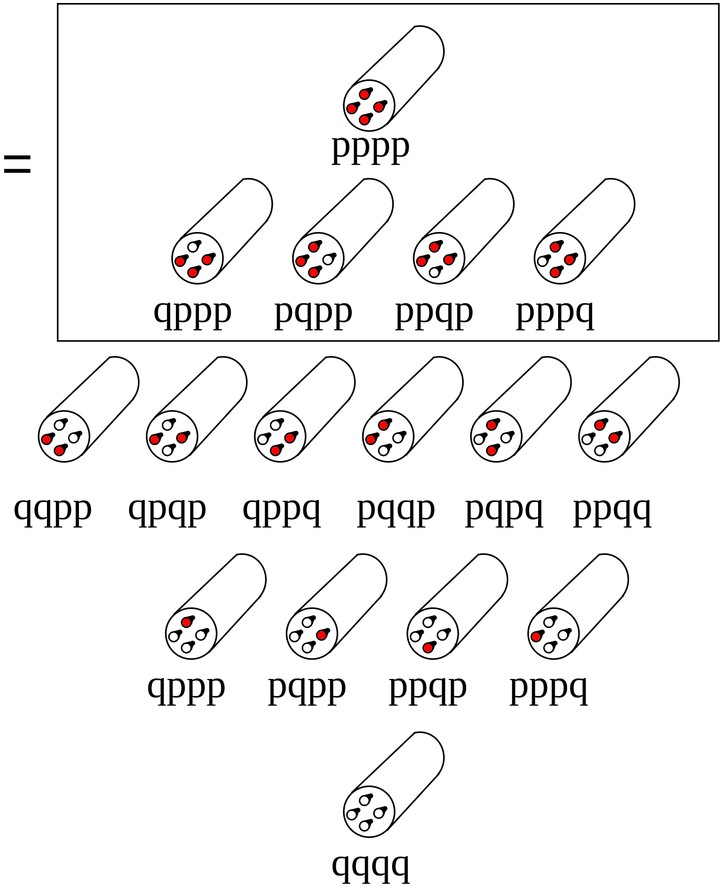
$1\,p^0 q^4$ 4 aus 4

p=P(Triebwerk ok)

q=P(Triebwerk defekt)=1-p

Binomialverteilung

H=



$1\,p^4 q^0$ 0 aus 4

+

$4\,p^3 q^1$ 1 aus 4

+

$6\,p^2 q^2$ 2 aus 4

+

$4\,p^1 q^3$ 3 aus 4

+

$1\,p^0 q^4$ 4 aus 4

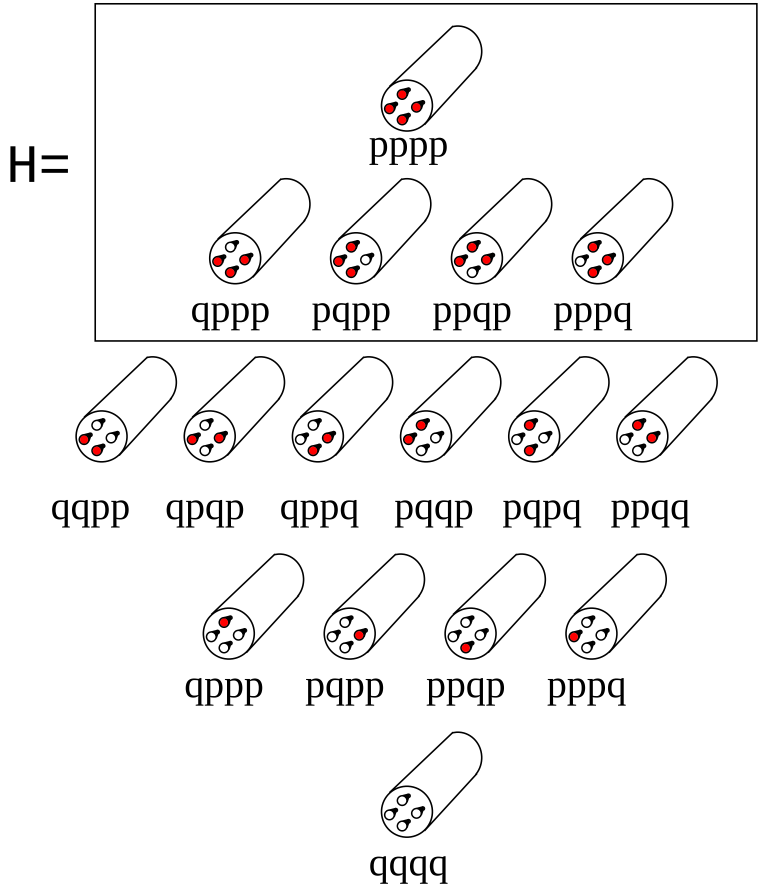
=

$1=(p+q)^4$

p=P(Triebwerk ok)

q=P(Triebwerk defekt)=1-p

Binomialverteilung



$$1\,p^4 q^0 = p_0$$
$$+$$
$$4\,p^3 q^1 = p_1$$
$$+$$
$$6\,p^2 q^2 = p_2$$
$$+$$
$$4\,p^1 q^3 = p_3$$
$$+$$
$$1\,p^0 q^4 = p_4$$
$$=$$
$$1=(p+q)^4$$

p=P(Triebwerk ok)

q=P(Triebwerk defekt)=1-p

k aus n

Es gibt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \; 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k)}$$

Möglichkeiten k Objekte aus n Stück auszusuchen.
Dabei ist:

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k = \prod_{i=1}^{k} i$$

Binomialverteilung

Def: Die diskrete Verteilung auf $\Omega_X = \{0, \ldots, n\}$ mit

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

heißt Binomialverteilung für n Wiederholungen zur "Erfolgswahrscheinlichkeit" p.

Binomialverteilung

Def: Die diskrete Verteilung auf $\Omega_X = \{0, \ldots, n\}$ mit

$$p_k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$$

heißt Binomialverteilung für n Wiederholungen zur "Erfolgswahrscheinlichkeit" p.
In Zeichen: $P^X = Bi(n, p)$

Binomialverteilung

Def: Die diskrete Verteilung auf $\Omega_X = \{0, \ldots, n\}$ mit

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

heißt Binomialverteilung für n Wiederholungen zur "Erfolgswahrscheinlichkeit" p.
In Zeichen: $P^X = Bi(n,p)$
Einsatz: Die Anzahl der "Erfolge" bei n unabhängigen Versuchen mit "Erfolgswahrscheinlichkeit" p ist $Bi(n,p)$ verteilt.

Beispiel für Modellierung

Wir würden also annehmen, dass Zufallsvariable

$$X = \text{“Anzahl der ausgefallenen Raktentriebwerke”}$$

binomialverteilt ist mit $n = 4$ Triebwerken und einer Einzelausfallwahrscheinlichkeit von

$$p = \text{“Wahrscheinlichkeit für ein Triebwerk auszufallen”}$$

und schreiben

$$X \sim Bi(4, p)$$

Wie bestimmen wir p?

Bestimmung von p

Es gibt verschiedene Wege p zu bestimmen:

- Weitere Modellierung des Triebwerks.
- “Erfahrung”/ “Einschätzung”
- Statistische Schätzung:

$$\hat{p} = \frac{\text{Anzahl Triebwerksausfälle}}{\text{Anzahl Versuche}}$$

Geht nur, wenn wir schon “vergleichbare” Tests gemacht haben.
Problem: Ungenau

Beispiel

Der Triebwerkshersteller hat das Triebwerk getestet und gibt die Ausfallwahrscheinlichkeit mit $p \leq \frac{1}{4}$ an.

Beispiel

Der Triebwerkshersteller hat das Triebwerk getestet und gibt die Ausfallwahrscheinlichkeit mit $p \leq \frac{1}{4}$ an.
Wir modellieren also unseren “worst case” mit:

$$p = P(\text{Triebwerk fällt aus}) = \frac{1}{14}$$

Beispiel

Der Triebwerkshersteller hat das Triebwerk getestet und gibt die Ausfallwahrscheinlichkeit mit $p \leq \frac{1}{4}$ an.
Wir modellieren also unseren “worst case” mit:

$$p = P(\text{Triebwerk fällt aus}) = \frac{1}{14}$$

Dann sind wegen $p_i = \begin{pmatrix} 4 \\ i \end{pmatrix} p^i (1-p)^{4-i}$

$$p_0 = 1 \cdot \frac{13^4}{14^4}, p_1 = 4 \cdot \frac{13^3}{14^4}, p_2 = 6 \cdot \frac{13^2}{14^4}, p_3 = 4 \cdot \frac{13^1}{14^4}, p_4 = 1 \cdot \frac{13^0}{14^4}$$

Beispiel

Der Triebwerkshersteller hat das Triebwerk getestet und gibt die Ausfallwahrscheinlichkeit mit $p \leq \frac{1}{4}$ an.
Wir modellieren also unseren “worst case” mit:

$$p = P(\text{Triebwerk fällt aus}) = \frac{1}{14}$$

Dann sind wegen $p_i = \begin{pmatrix} 4 \\ i \end{pmatrix} p^i (1-p)^{4-i}$

$$p_0 = 1 \cdot \frac{13^4}{14^4}, p_1 = 4 \cdot \frac{13^3}{14^4}, p_2 = 6 \cdot \frac{13^2}{14^4}, p_3 = 4 \cdot \frac{13^1}{14^4}, p_4 = 1 \cdot \frac{13^0}{14^4}$$

und also wegen $P(A) = \sum_{k \in A} p_k$

$$P(H) = P(\{0,1\}) = p_0 + p_1 = 0.9722511453561 \approx 0.97$$

Rückblick

- Wir haben die Anzahl Triebwerksausfälle als **Zufallsvariable** X modelliert.
- Wir haben die Verteilung durch das Standardmodell **“Binomialverteilung” modelliert.**
- Der Hersteller hat einen unbekannten Modellparameter p **geschätzt.**
- Wir haben das **Ereignis** $H =$ “Hauptantrieb funktioniert” als Menge $\{0, 1\}$ der Werte von X geschrieben, bei dem das Triebwerk funktionert.
- Wir haben die **Wahrscheinlichkeit** von H mit den Formeln für die Binomialverteilung berechnen.

Diskrete Verteilungen angeben

Diskrete Verteilungen können angegeben werden durch die Wahrscheinlichkeiten:

$$p_x = P(X = x), x \in \Omega_X$$

z.B. $p_x = \begin{pmatrix} 4 \\ x \end{pmatrix} \left(\frac{1}{14}\right)^x \left(\frac{13}{14}\right)^{4-x}$

Diese heißen Elementarwahrscheinlichkeiten

oder

durch eine eine Verteilungsnotation: z.B.

$$X \sim Bi(4, \frac{1}{14})$$

Reellwertige und stetige Verteilungen

Bsp: Wirkungsgrad des Hauptantriebs

Zufallsvariable:

$$W = \text{“Spezifische Wirkung des Hauptantriebs”}$$

Raktentriebwerke haben je nach Effektivität der Treibstoffmischung und Fokusierung des Strahls einen unterschiedlichen Wirkungsgrad z.B. gemessen in

$$W = \frac{\text{“Schubkraft in Newton”} \cdot \text{“Brenndauer”}}{\text{“Masse Treibstoff”}}$$

“Wirkungsgrad für Raktentriebwerke”

Bsp: Wirkungsgrad des Hauptantriebs

Zufallsvariable:

$W =$ “Spezifische Wirkung des Hauptantriebs”

Wertebereich: $\Omega_W = \mathbb{R}_+$
Skala: Positiv Reel

Bsp: Wirkungsgrad des Hauptantriebs

Zufallsvariable:

$$W = \text{“Spezifische Wirkung des Hauptantriebs”}$$

Wertebereich: $\Omega_W = \mathbb{R}_+$
Skala: Positiv Reel
Realisierungen: z.B.

$$w = \frac{10.2345kN\ 523.2s}{14.21t} = 37682.55\frac{Ns}{kg}$$

Interessierende Ereignisse

Interessierendes Ereignis:

$$W \geq W_{\text{krit}}$$

Wobei W_{krit} die minimale spezifische Wirkung ist, um mit der vorhanden Treibstoffmenge die Umlaufbahn zu erreichen.

Verteilungsfunktion

Die Verteilung reller Zufallsvariablen X kann über die Verteilungsfunktion F_X beschrieben werden:

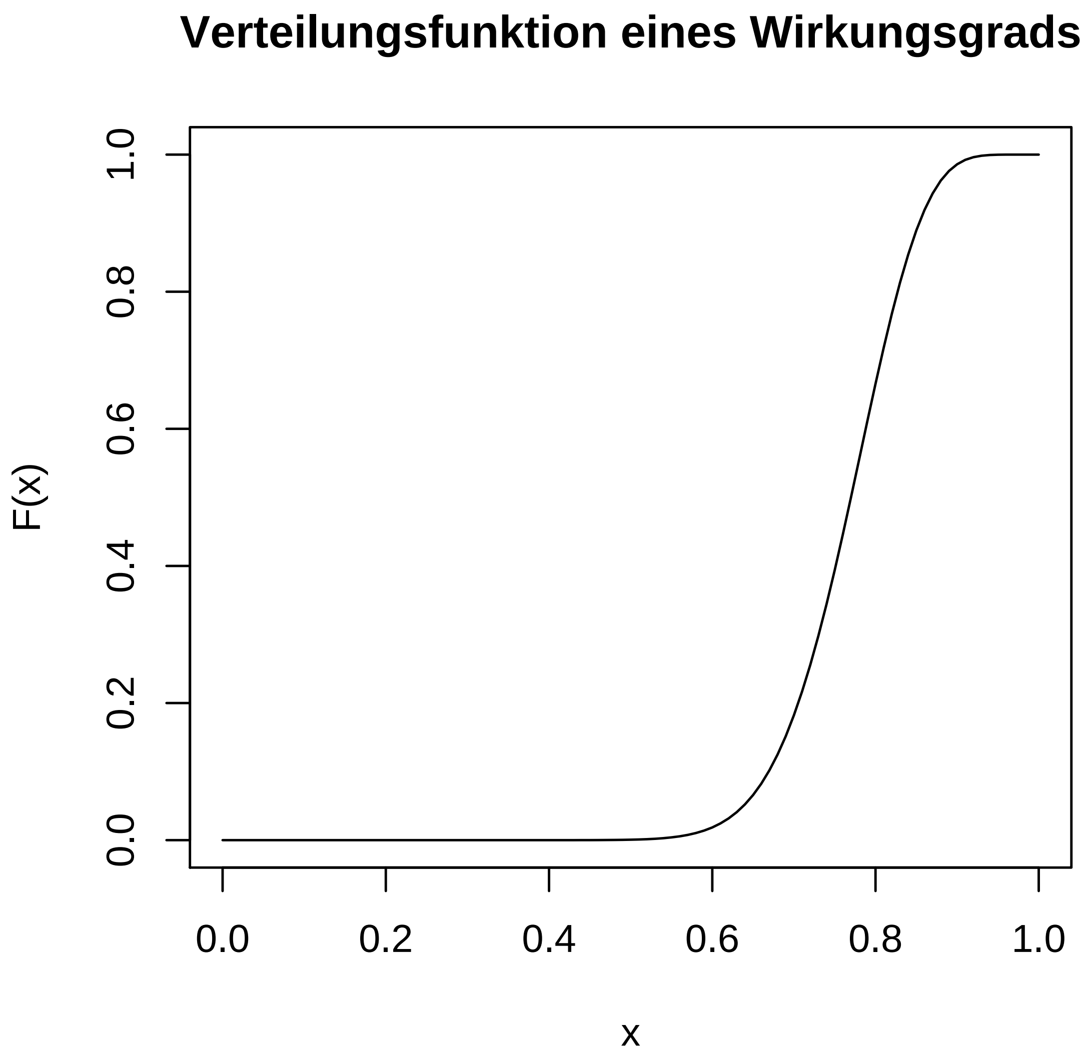
$$F_X(x) := P(X \leq x)$$

Verteilungsfunktion

Die Verteilung reller Zufallsvariablen X kann über die Verteilungsfunktion F_X beschrieben werden:

$$F_X(x) := P(X \leq x) = P^X((-\infty, x])$$

Beispiel Verteilungsfunktion I



Verteilungsfunktion

Die Verteilung reller Zufallsvariablen X kann über die Verteilungsfunktion F_X beschrieben werden:

$$F_X(x) := P(X \leq x) = P^X((-\infty, x])$$

Verteilungsfunktion

Die Verteilung reller Zufallsvariablen X kann über die Verteilungsfunktion F_X beschrieben werden:

$$F_X(x) := P(X \leq x) = P^X((-\infty, x])$$

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:

$$P^X((a, b]) = \underbrace{F_X(b)}_{P((-\infty,b])} - \underbrace{F_X(a)}_{P((-\infty,a])}$$

Verteilungsfunktion

Die Verteilung reller Zufallsvariablen X kann über die Verteilungsfunktion F_X beschrieben werden:

$$F_X(x) := P(X \leq x) = P^X((-\infty, x])$$

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:

$$P^X((a,b]) = \underbrace{F_X(b)}_{P((-\infty,b])} - \underbrace{F_X(a)}_{P((-\infty,a])}$$

$$P^X((a,b)) = \underbrace{\lim_{\beta \uparrow b} F_X(\beta)}_{P((-\infty,b))} - \underbrace{F_X(a)}_{P((-\infty,a])}$$

Verteilungsfunktion

Die Verteilung reller Zufallsvariablen X kann über die Verteilungsfunktion F_X beschrieben werden:

$$F_X(x) := P(X \leq x) = P^X((-\infty, x])$$

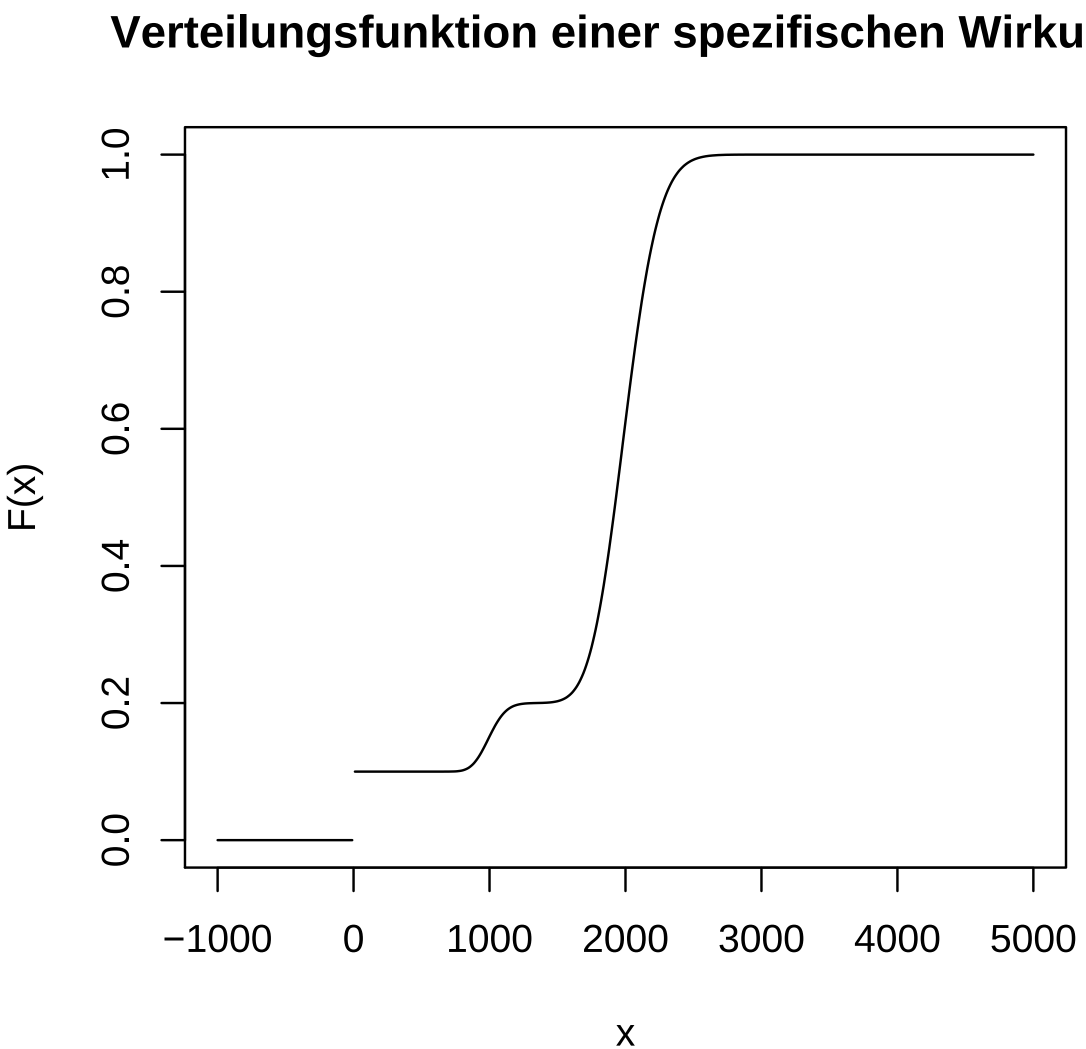
Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:

$$P^X((a,b]) = \underbrace{F_X(b)}_{P((-\infty,b])} - \underbrace{F_X(a)}_{P((-\infty,a])}$$

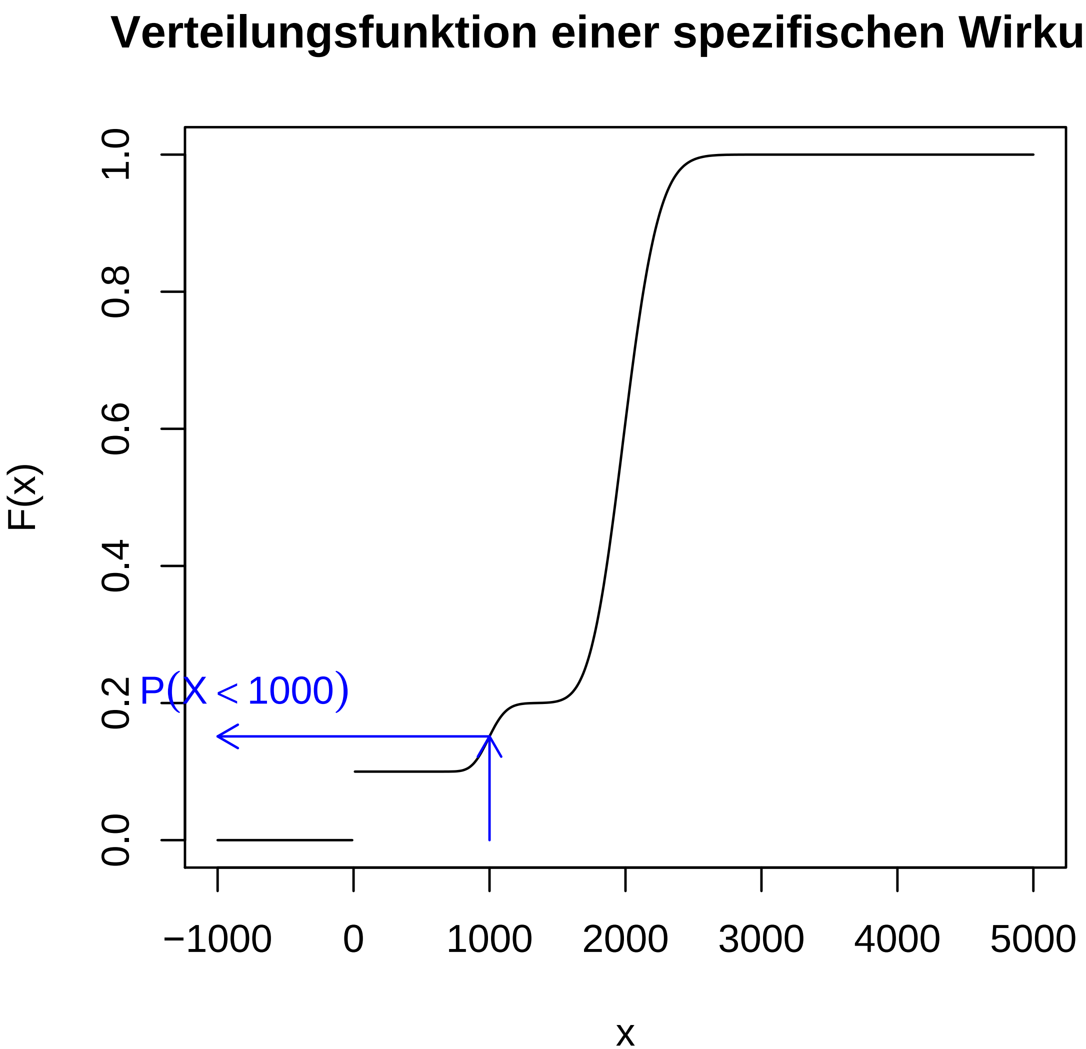
$$P^X((a,b)) = \underbrace{\lim_{\beta \uparrow b} F_X(\beta)}_{P((-\infty,b))} - \underbrace{F_X(a)}_{P((-\infty,a])}$$

$$P^X([a,b]) = \underbrace{F_X(b)}_{P((-\infty,b])} - \underbrace{\lim_{\alpha \uparrow a} F_X(\alpha)}_{P((-\infty,a))}$$

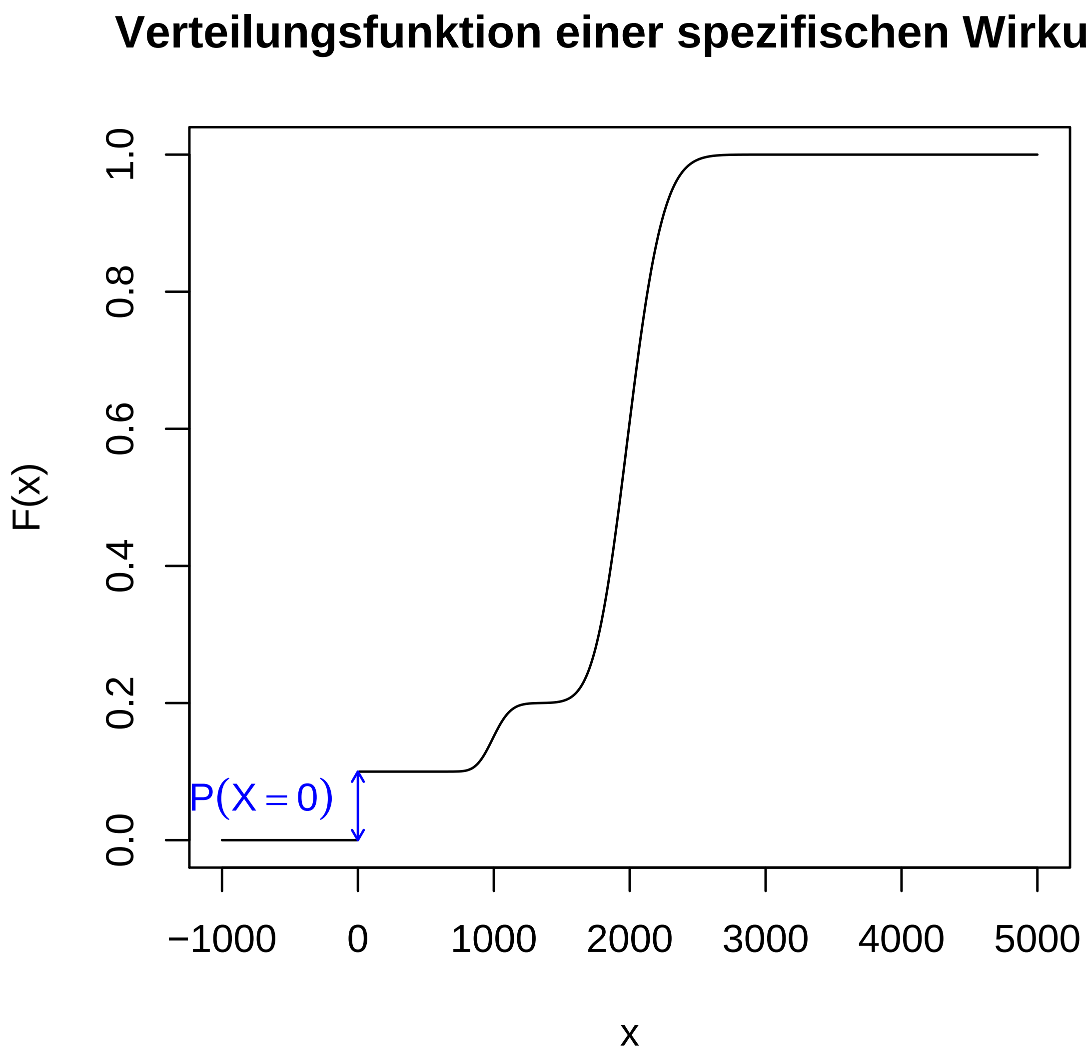
Beispiel Verteilungsfunktion II



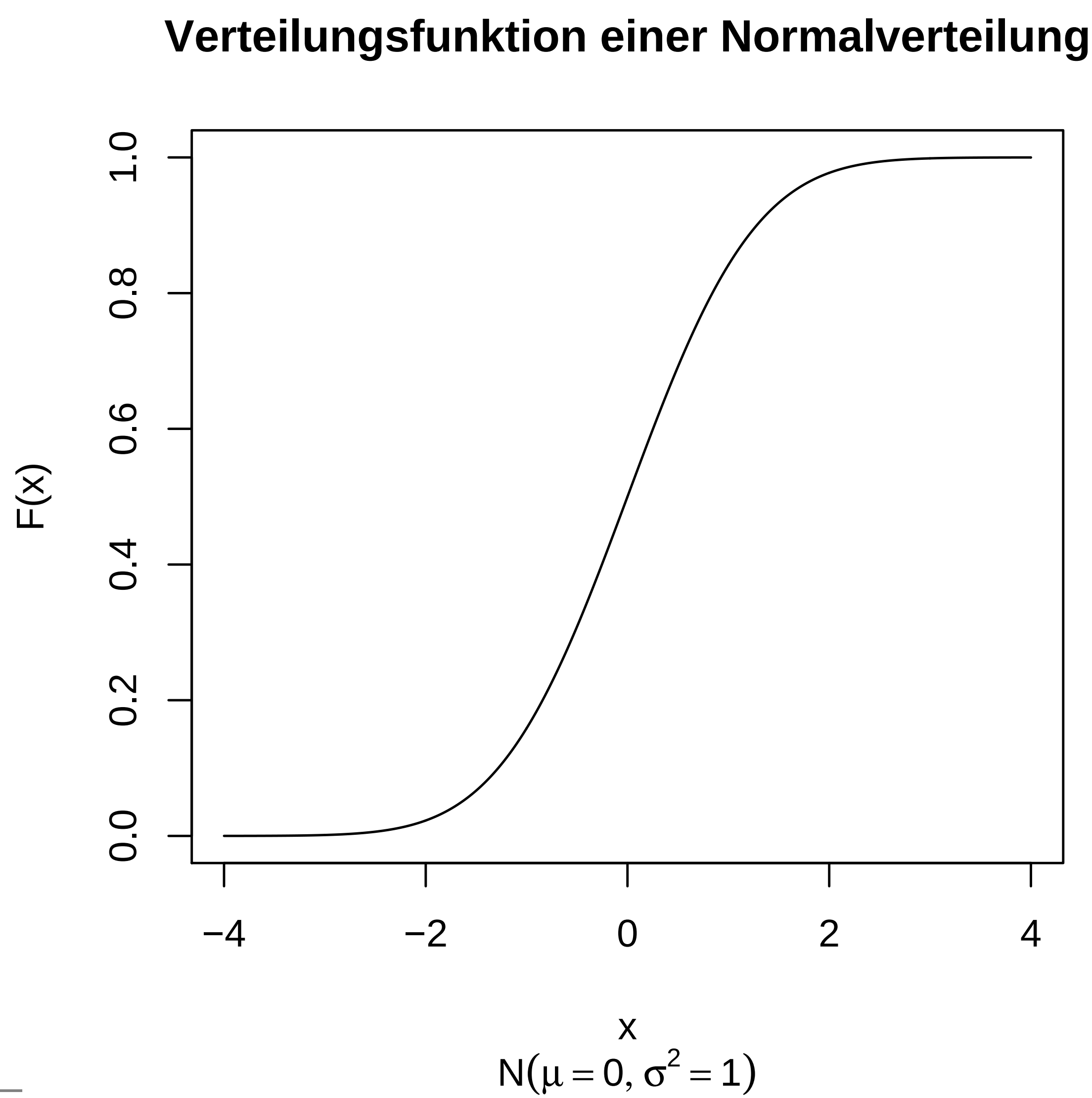
Beispiel Verteilungsfunktion II



Beispiel Verteilungsfunktion II



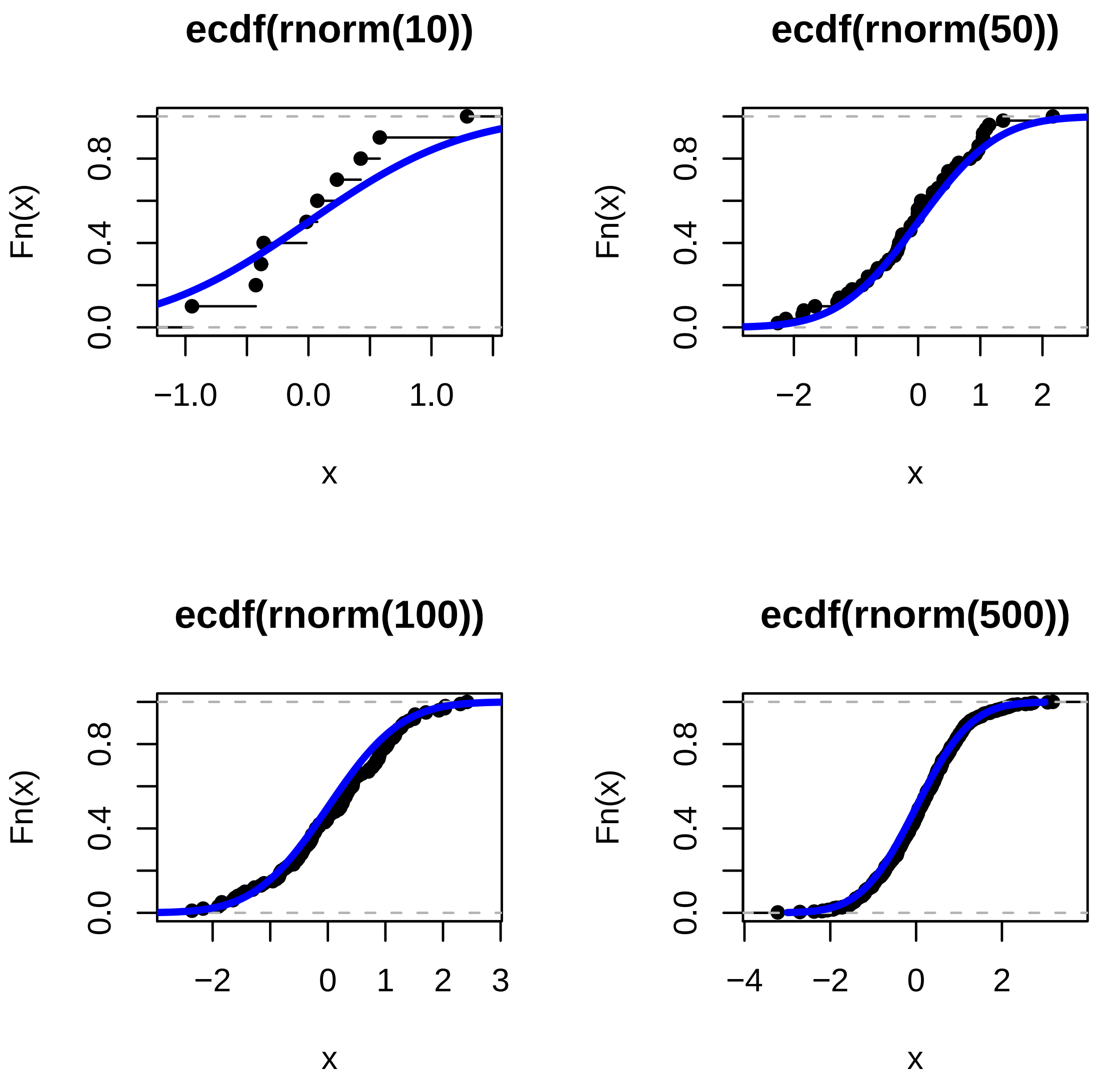
Beispiel Verteilungsfunktion III



Woher bekommt man F_X?

- **Aus Verteilungsmodellen**
- **. . . , mit geschätzten Parametern**
- **aus der Literatur/Angabe der Aufgabe**

Empirische Verteilungsfunktion



Wahrscheinlichkeitsdichte

Wahrscheinlichkeitsdichte

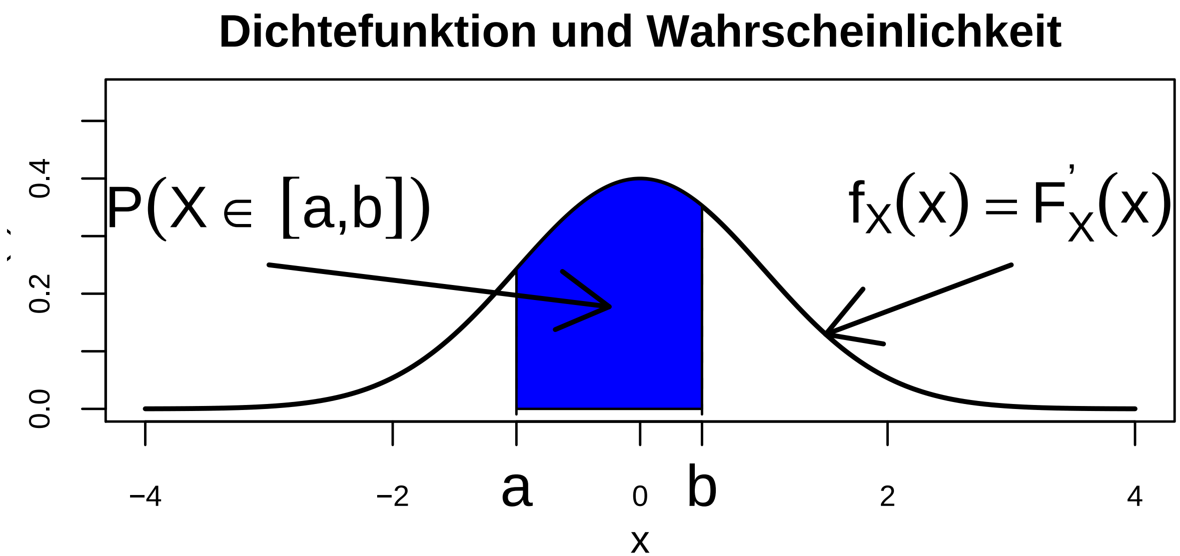
Für stetige Verteilungsfunktionen definieren wir:
Def: Die Ableitung $f_X(x) = F'_X(x)$ der Verteilungsfunktion $F_X(x)$ heißt die **Wahrscheinlichkeitsdichte** oder kurz **Dichte** von X.

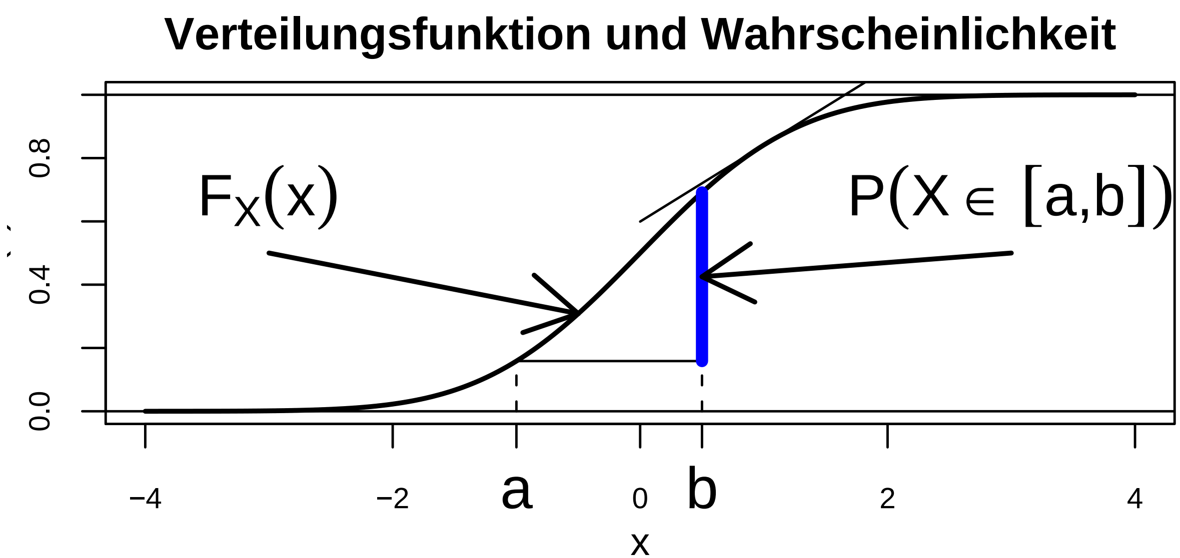
Wahrscheinlichkeitsdichte

Für stetige Verteilungsfunktionen definieren wir:
Def: Die Ableitung $f_X(x) = F'_X(x)$ der Verteilungsfunktion $F_X(x)$ heißt die **Wahrscheinlichkeitsdichte** oder kurz **Dichte** von X.

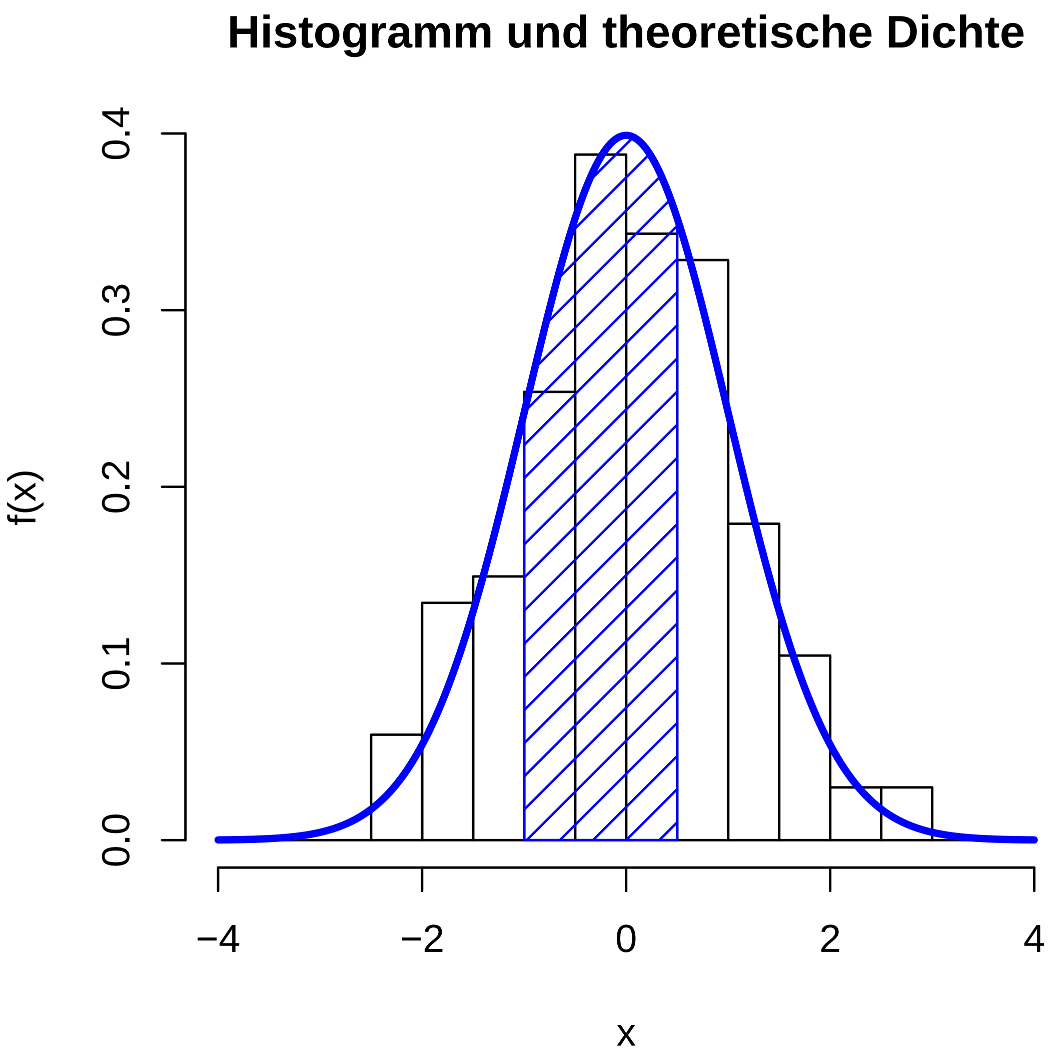
$$f_X(x) = F'_X(x), \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$$

Fläche unter der Dichte

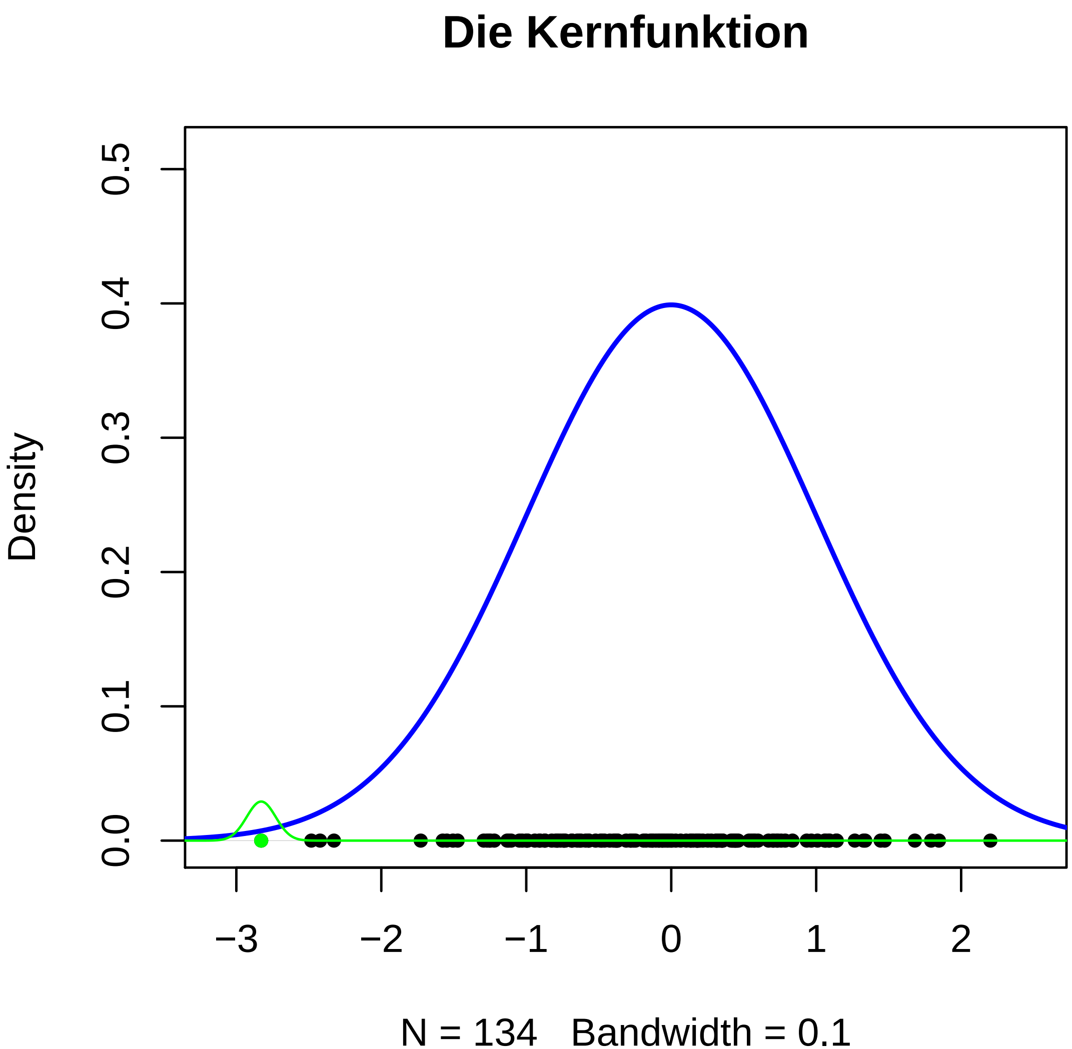




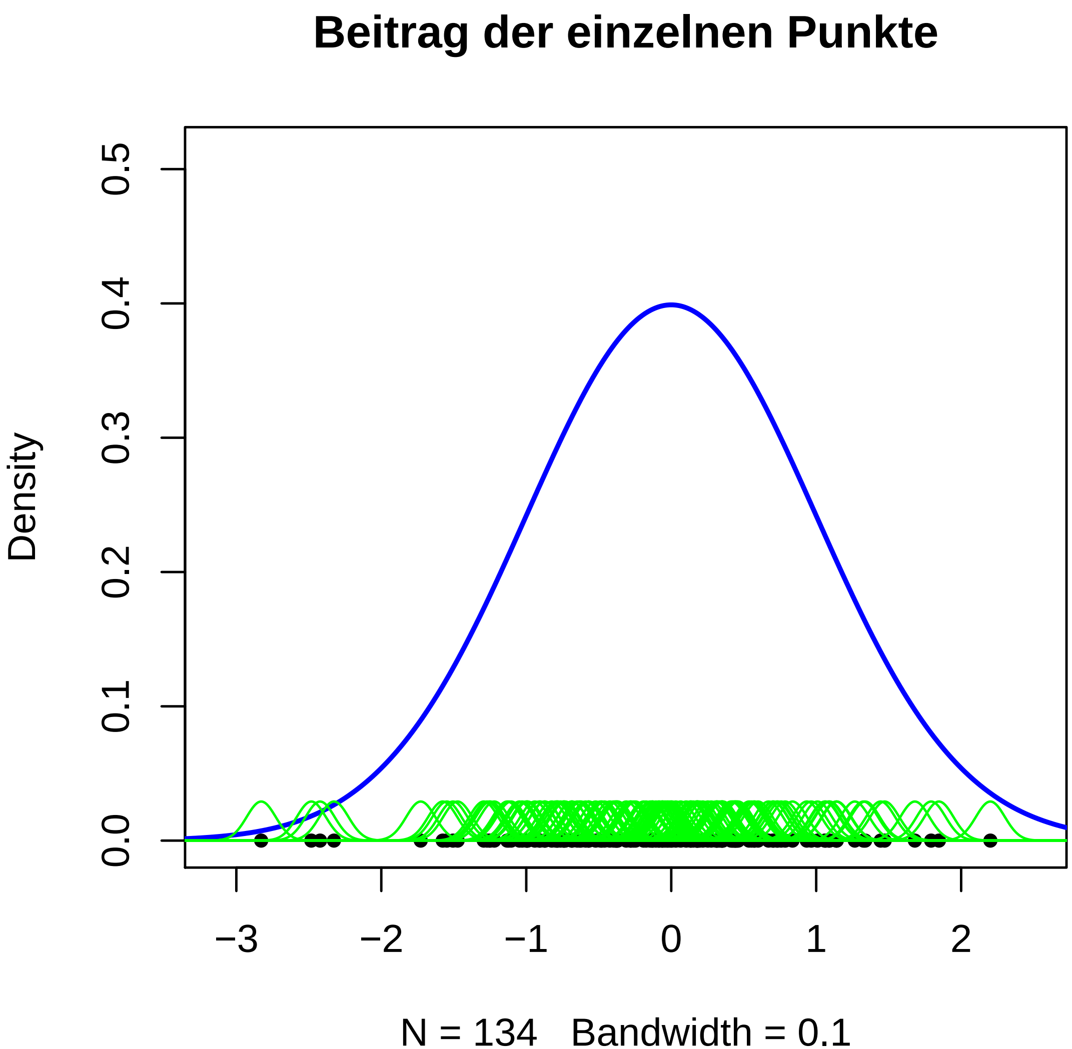
Dichte und Histogramm



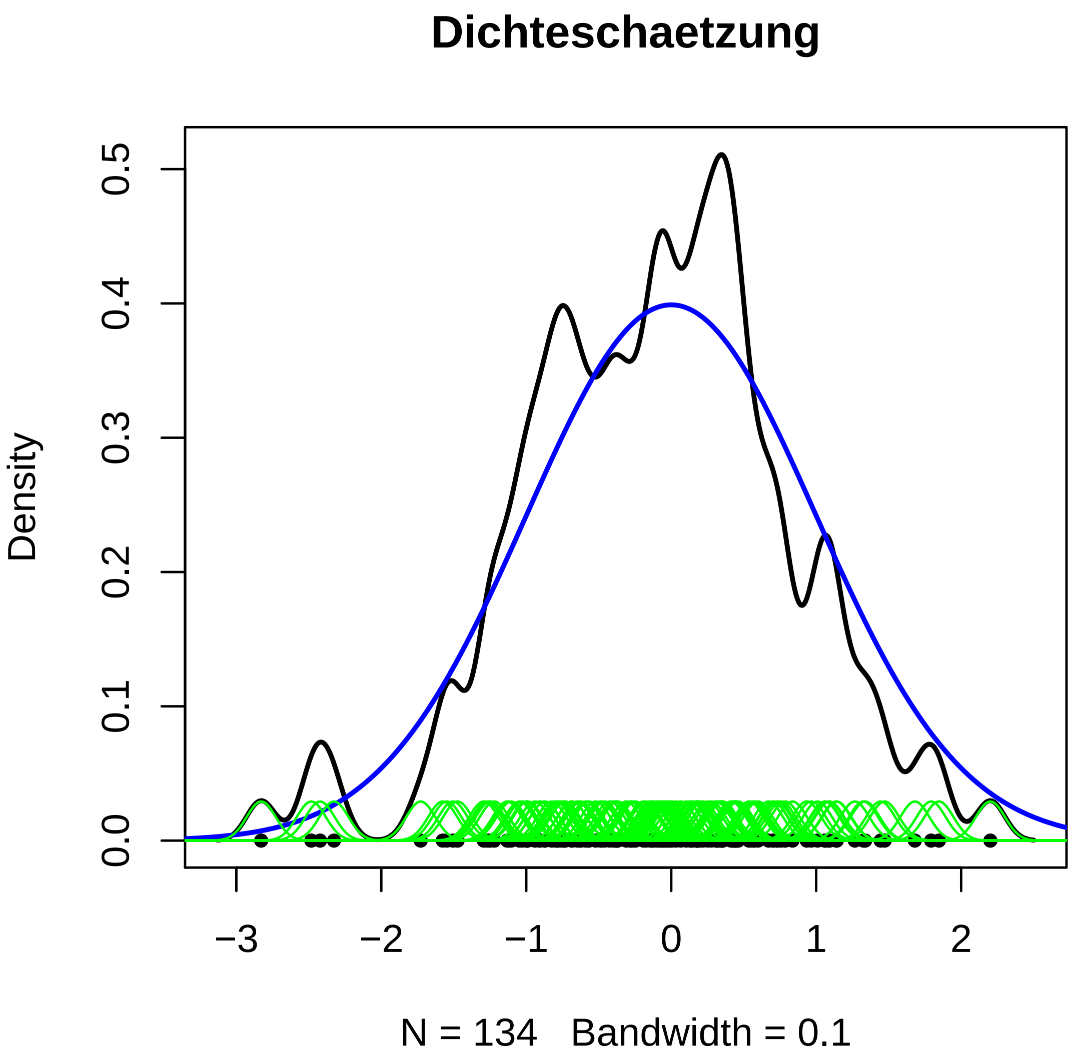
Kerndichteschätzung



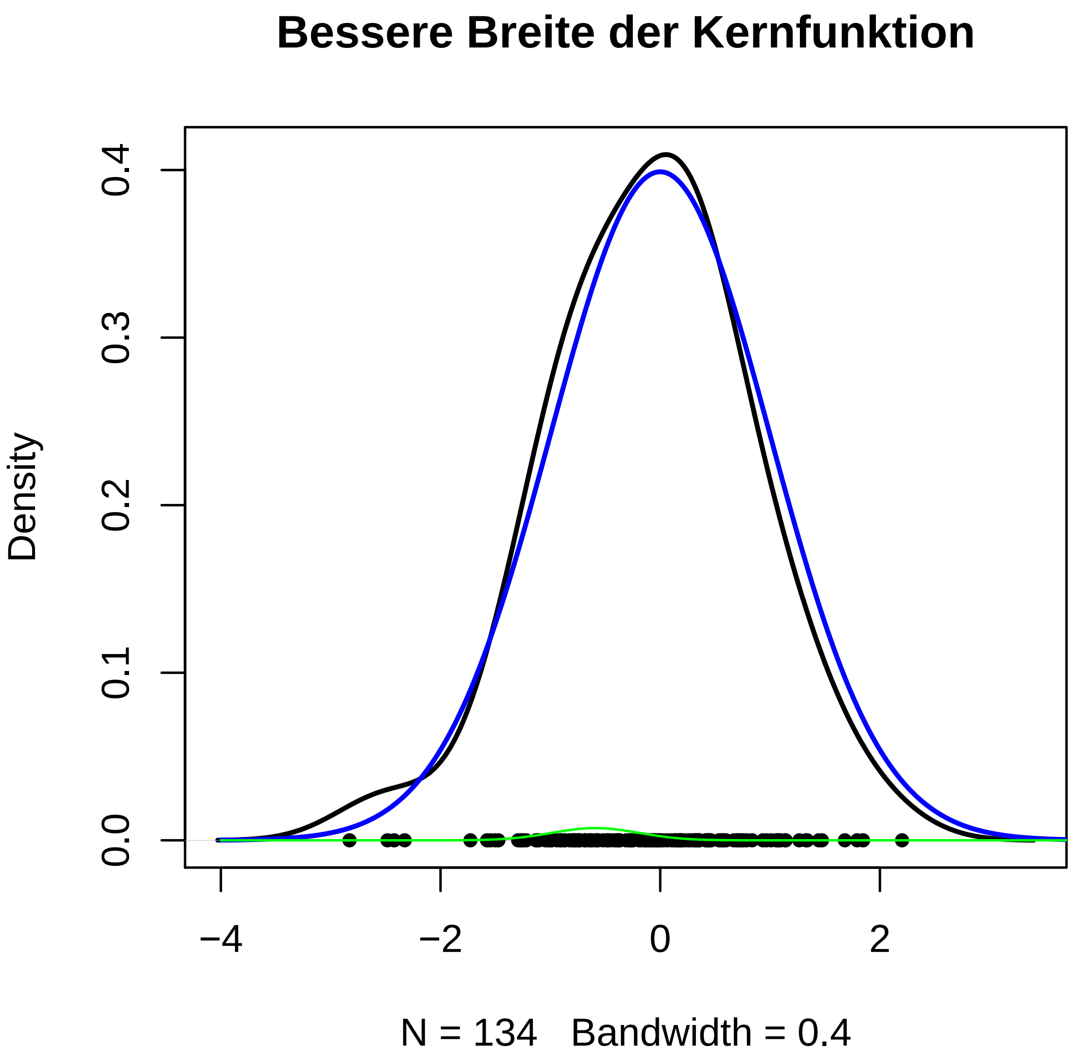
Kerndichteschätzung



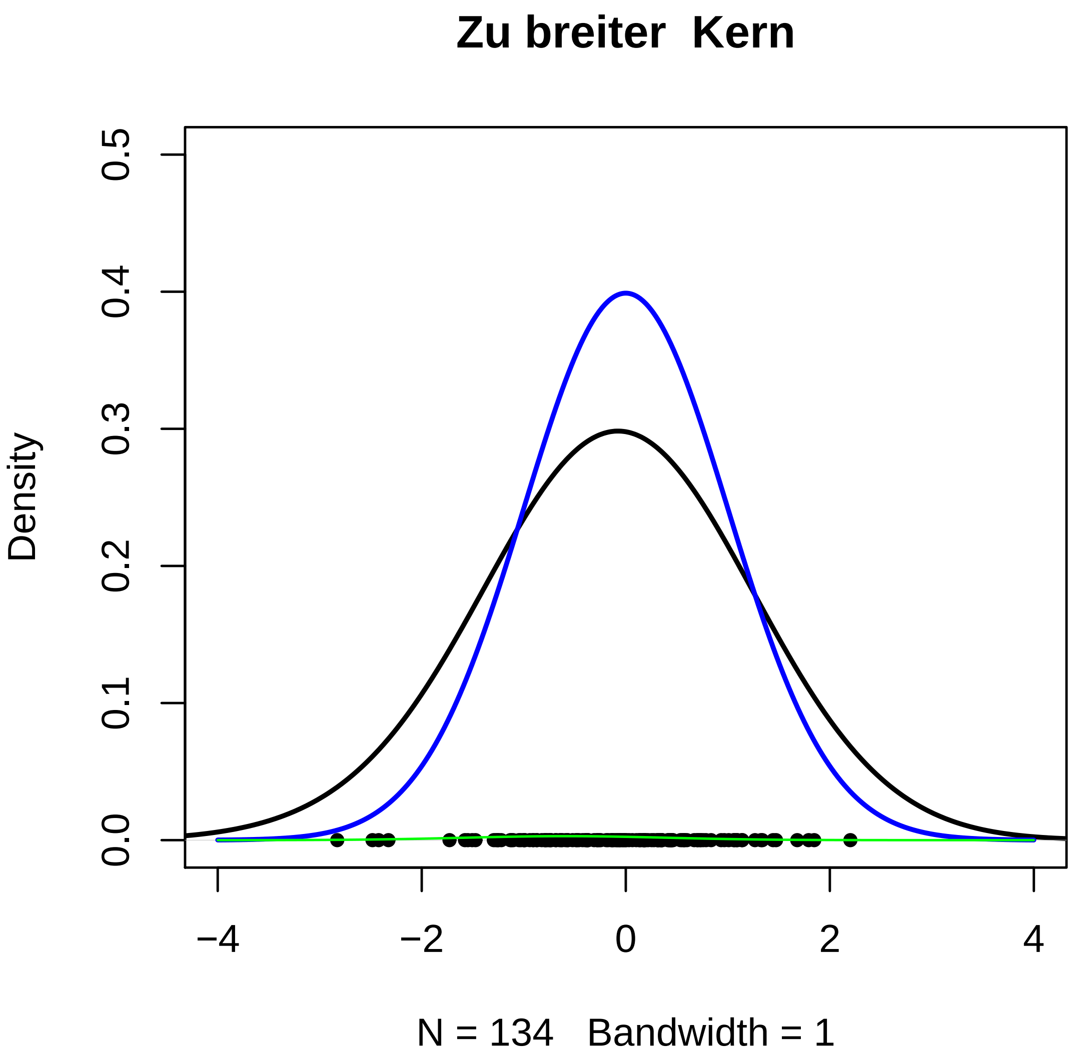
Kerndichteschätzung



Kerndichteschätzung



Kerndichteschätzung



Kerndichteschätzung

$$\hat{f}_X(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{bn} \phi\left(\frac{X_i - x}{b}\right)$$

z.B. mit der Kernfunktion

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

- Die Breite b des Kerns muß richtig gewählt sein.
- Zu schmale Kerne machen “Gewackele”.
- Zu breite Kerne machen “alles platt”.
- Die geschätzten Dichten sind tententiell zu flach.
- Die geschätzten Dichten weisen unsinnige “Strukturen” auf.

Verteilungen beschreiben und zusammenfassen

Beschreiben und zusammenfassen

- Verteilungen lassen sich so ähnlich wie Stichproben graphisch darstellen und durch Parameter zusammenfassen.

Beschreiben und zusammenfassen

- Verteilungen lassen sich so ähnlich wie Stichproben graphisch darstellen und durch Parameter zusammenfassen.
- Wieder unterscheidet man nach der Skala der Zufallsvariable.

Beschreiben und zusammenfassen

- Verteilungen lassen sich so ähnlich wie Stichproben graphisch darstellen und durch Parameter zusammenfassen.
- Wieder unterscheidet man nach der Skala der Zufallsvariable.
- Manchmal hat die analoge Technik für Verteilungen einen etwas anderen Namen.

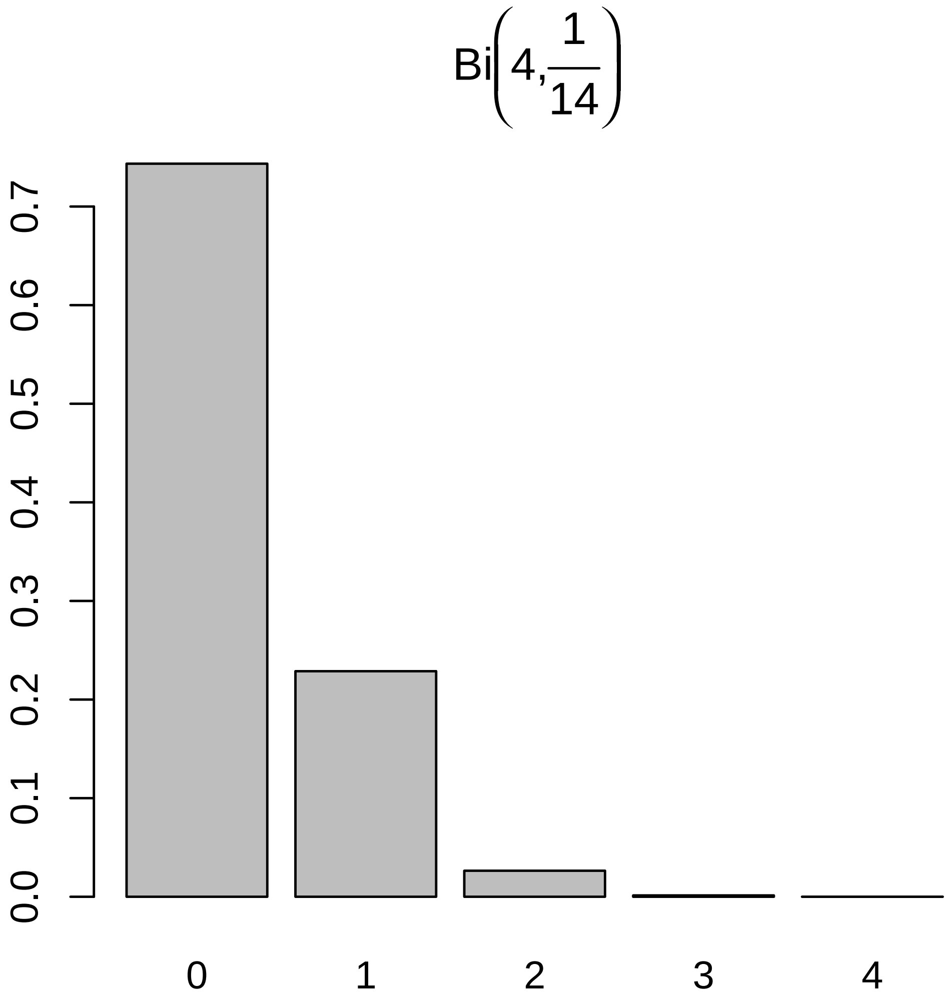
Beschreiben und zusammenfassen

- Verteilungen lassen sich so ähnlich wie Stichproben graphisch darstellen und durch Parameter zusammenfassen.
- Wieder unterscheidet man nach der Skala der Zufallsvariable.
- Manchmal hat die analoge Technik für Verteilungen einen etwas anderen Namen.
- Will man explizit sagen, dass sich die Größe auf die Verteilung bezieht, so spricht man von der **theoretischen** Größe.

Beschreiben und zusammenfassen

- Verteilungen lassen sich so ähnlich wie Stichproben graphisch darstellen und durch Parameter zusammenfassen.
- Wieder unterscheidet man nach der Skala der Zufallsvariable.
- Manchmal hat die analoge Technik für Verteilungen einen etwas anderen Namen.
- Will man explizit sagen, dass sich die Größe auf die Verteilung bezieht, so spricht man von der **theoretischen** Größe.
- Will man explizit sagen, dass sich die Größe auf die Stichprobe bezieht, so spricht man von der **empirischen** Größe.

Balkendiagramm f. diskr. Verteilungen



Wahrscheinlichkeiten

```
            0             1             2             3             4
7.434663e-01 2.287589e-01 2.639525e-02 1.353603e-03 2.603082e-05
```

Für dichotome Größen

Der Odd:

$$odd(p_{\text{ja}}) = \frac{P(\text{ja})}{P(\text{nein})} = \frac{p_{\text{ja}}}{1 - p_{\text{ja}}}$$

Wieviel wahrscheinlicher ist es zu gewinnen als zu verlieren.
z.B. für den Funktionieren des einzelnen Triebwerks $p = \frac{13}{14}$:

$$odd\left(\frac{13}{14}\right) = \frac{\frac{13}{14}}{\frac{1}{14}} = 13$$

Es ist dreizehn mal so wahrscheinlich, dass das Triebwerk funktioniert, als das es nicht funktioniert.

Momente:
Erwartungswert, Varianz

Motivation Erwartungswert

Erwartungswert als Mittelwert der Grundgesamtheit:

$$\begin{aligned}
E[X] &:= \sum_{x \in \Omega_X} x p_x \\
&= \sum_{x \in \Omega_X} x \frac{\text{“Anzahl x in Grundgesamtheit”}}{n} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{\text{Grundgesamtheit}} X
\end{aligned}$$

Definition des Erwartungswerts

Def:
Erwartungswert (für diskrete Größen)

$$E[X] = \sum_{x \in \Omega_X} x p_x$$

Definition des Erwartungswerts

Def:
Erwartungswert (für diskrete Größen)

$$E[X] = \sum_{x \in \Omega_X} x p_x$$

Erwartungswert (für stetige Größen)

$$\begin{aligned} E[X] &:= \int_{\Omega_X} x f(x) dx \\ &= \lim_{\Delta \downarrow 0} \sum_{x \in \Delta_x \mathbb{N}} x f(x) \Delta_x \\ &= \lim_{\Delta_x \downarrow 0} \sum_{x \in \Delta_x \mathbb{N}} x P([x, x + \Delta_x]) \end{aligned}$$

Definition des Erwartungswerts

Def:
Erwartungswert (für diskrete Größen)

$$E[X] = \sum_{x \in \Omega_X} x p_x$$

Erwartungswert (für stetige Größen)

$$\begin{aligned} E[X] &:= \int_{\Omega_X} x f(x) dx \\ &= \lim_{\Delta \downarrow 0} \sum_{x \in \Delta_x \mathbb{N}} x f(x) \Delta_x \\ &= \lim_{\Delta_x \downarrow 0} \sum_{x \in \Delta_x \mathbb{N}} x P([x, x + \Delta_x]) \end{aligned}$$

Definition des Erwartungswerts

Def:
Erwartungswert (für diskrete Größen)

$$E[X] = \sum_{x \in \Omega_X} x p_x$$

Erwartungswert (für stetige Größen)

$$\begin{aligned} E[X] &:= \int_{\Omega_X} x f(x) dx \\ &= \lim_{\Delta \downarrow 0} \sum_{x \in \Delta_x \mathbb{N}} x f(x) \Delta_x \\ &= \lim_{\Delta_x \downarrow 0} \sum_{x \in \Delta_x \mathbb{N}} x P([x, x + \Delta_x]) \end{aligned}$$

Beispiel

$X \sim Bi\left(4, \frac{1}{14}\right)$:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= 0 \cdot 1 \left(\frac{13}{14}\right)^4 \\
&\quad +4 \left(\frac{13}{14}\right)^3 \left(\frac{1}{14}\right)^1 \\
&\quad +6 \left(\frac{13}{14}\right)^2 \left(\frac{1}{14}\right)^2 \\
&\quad +4 \left(\frac{13}{14}\right)^1 \left(\frac{1}{14}\right)^1 \\
&\quad +1 \left(\frac{1}{14}\right)^4 \\
&= \frac{0 \cdot 1 \cdot 13^4 + 1 \cdot 4 \cdot 13^3 + 2 \cdot 6 \cdot 13^2 + 3 \cdot 4 \cdot 13^1 + 1}{14^4} \\
&= \frac{4}{14}
\end{aligned}
$$

Mittelwert und Erwartungswert

Satz: Starkes Gesetz der großen Zahlen
Sind die X_i stochastisch unabhängig und wie X verteilt, so gilt:

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i = E[X]\right) = 1$$

ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Mittelwert einer immer größer werden Stichprobe letztlich gegen den Erwartungswert konvergiert gleich 1.

Transformierter Erwartungswert

Sei T eine Funktion von X so ist $Y = T(X)$ eine neue Zufallsvariable und es gilt:

$$E[T(X)] = \sum_{x \in \Omega_X} T(x) p_x$$

bzw.

$$E[T(X)] = \int_{\Omega_X} T(x) f(x) dx$$

z.B. $T(x) = (x-3)^2$
z.B. $T(x) =$
Treistoffverbrauch pro Sekunde bei x kaputten Triebwerken

Rechenregel für $E[X]$

Seien X, Y Zufallsvariablen und α eine relle Zahl:

- $E[\alpha X] = \alpha E[X]$,

$$\begin{aligned} E[\alpha X] &= \sum_{x \in \Omega_X} \alpha x p_x \\ &= \alpha \sum_{x \in \Omega_X} x p_x \\ &= \alpha E[X] \end{aligned}$$

Rechenregel für $E[X]$

Seien X, Y Zufallsvariablen und α eine relle Zahl:

- $E[\alpha X] = \alpha E[X]$,
- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

$$\begin{aligned} E[X+Y] &= \sum_{v \in \Omega_{(X,Y)}} (x+y) p_{(x,y)} \\ &= \sum_{v \in \Omega_{(X,Y)}} x p_{(x,y)} + \sum_{v \in \Omega_{(X,Y)}} y p_{(x,y)} \\ &= E[X] + E[Y] \end{aligned}$$

Beispiel

Seien X_i, $i = 1, \ldots, n$ unabhängig und genauso wie X verteilt:

$$
\begin{aligned}
E[\bar{X}] &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] \\
&= \frac{1}{n} n E\left[X\right] = E\left[X\right]
\end{aligned}
$$

Beispiel: Binomialverteilung

Für ein $X_i \sim Bi(1, p)$ gilt:

$$E[X_i] = 0(1-p) + 1p = p$$

Also gilt für $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim Bi(n, p)$ sofort:

$$\begin{aligned} E[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] &= E[X_1] + \ldots + E[X_n] \\ &= p + \ldots + p \\ &= np \end{aligned}$$

Formel für Binomialverteilung

Für $X \sim Bi(n, p)$ gilt:

$$E[X] = np$$

Weil man ja die Anzahl der Ereignisse zählt, die mit Wahrscheinlichkeit p zustande gekommen sind.

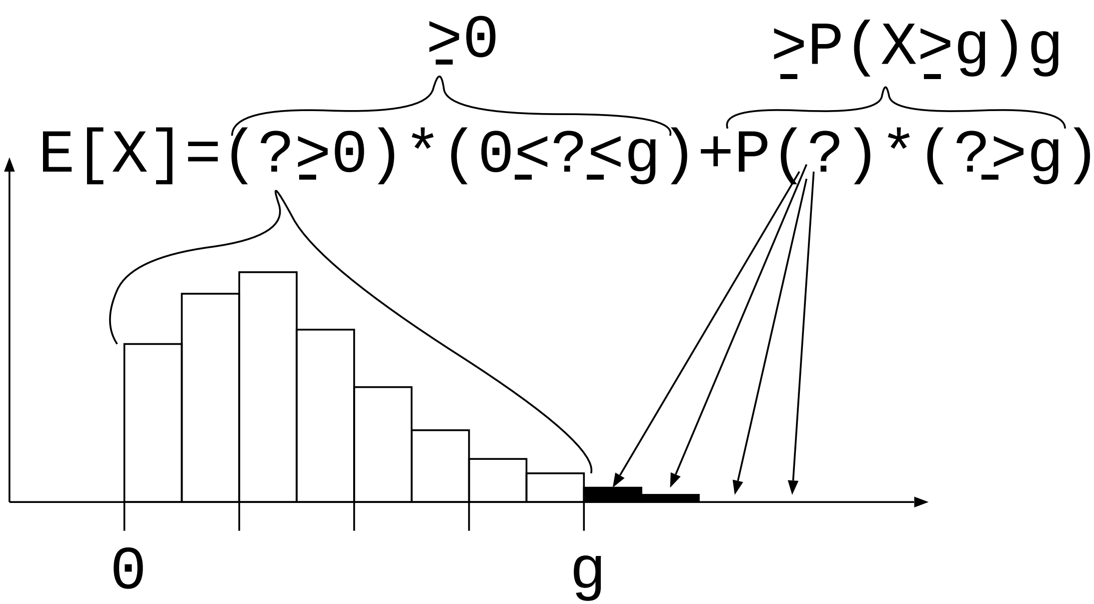
Was tut man mit dem Erwartungswert?

- Man beschreibt die Lage der Verteilung (wie Mittelwert)

Was tut man mit dem Erwartungswert?

- Man beschreibt die Lage der Verteilung (wie Mittelwert)
- Markovungleichung (für positive Zufallsgrößen):

$$P(X \geq g) \leq \frac{E[X]}{g}$$



Was tut man mit dem Erwartungswert?

- Man beschreibt die Lage der Verteilung (wie Mittelwert)
- Markovungleichung (für positive Zufallsgrößen):

$$P(X \geq g) \leq \frac{E[X]}{g}$$

- Erwartungswerte kann man durch Mittelwerte leicht schätzen.

Was tut man mit dem Erwartungswert?

- Man beschreibt die Lage der Verteilung (wie Mittelwert)
- Markovungleichung (für positive Zufallsgrößen):

$$P(X \geq g) \leq \frac{E[X]}{g}$$

- Erwartungswerte kann man durch Mittelwerte leicht schätzen.
- Viele Parameter kann man aus geschätzen Erwartungswerten ausrechnen.
  e.g. Binomialverteilung $Bi(4, p)$

$$E[X] = 4p, \;\rightarrow \hat{p} = \frac{\bar{X}}{4}$$

Theoretische Quantile

Def: Ein Wert q_p mit der Eigenschaft:

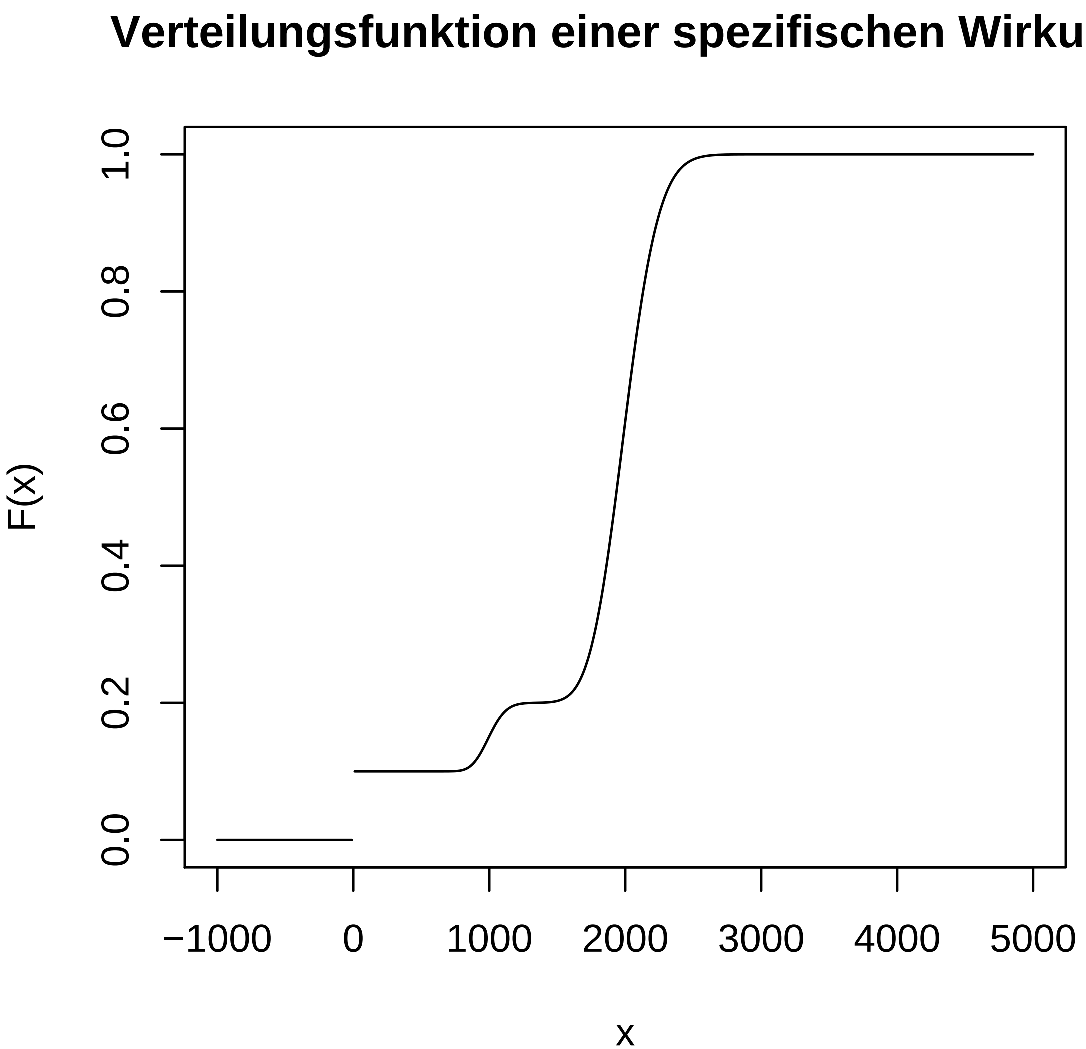
$$\lim_{b \longrightarrow q} F_X(b) \leq p \leq F_X(q)$$

heißt p-Quantil der Verteilung von X.

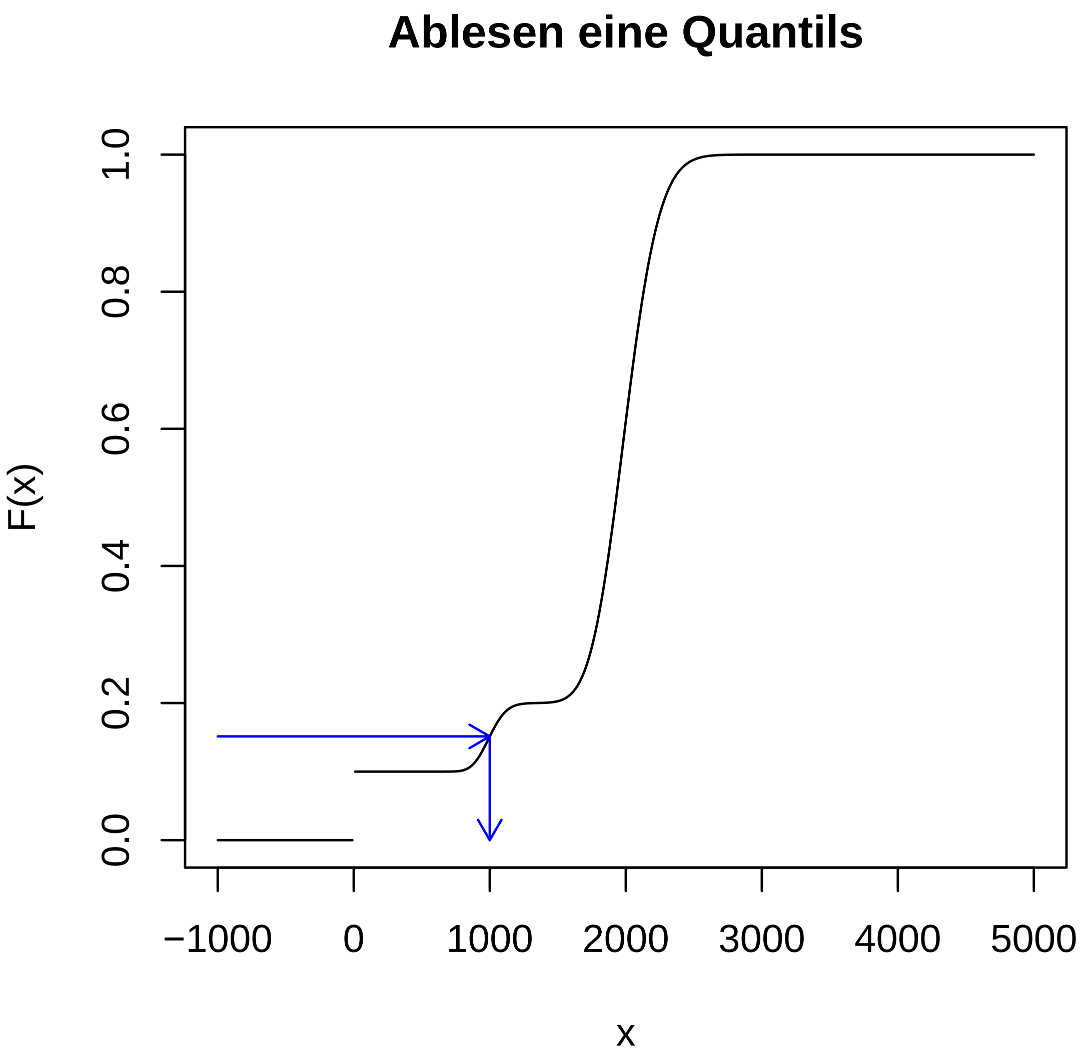
Im Klartext:

$$P(X < q_p) = p$$

Theoretische Quantile

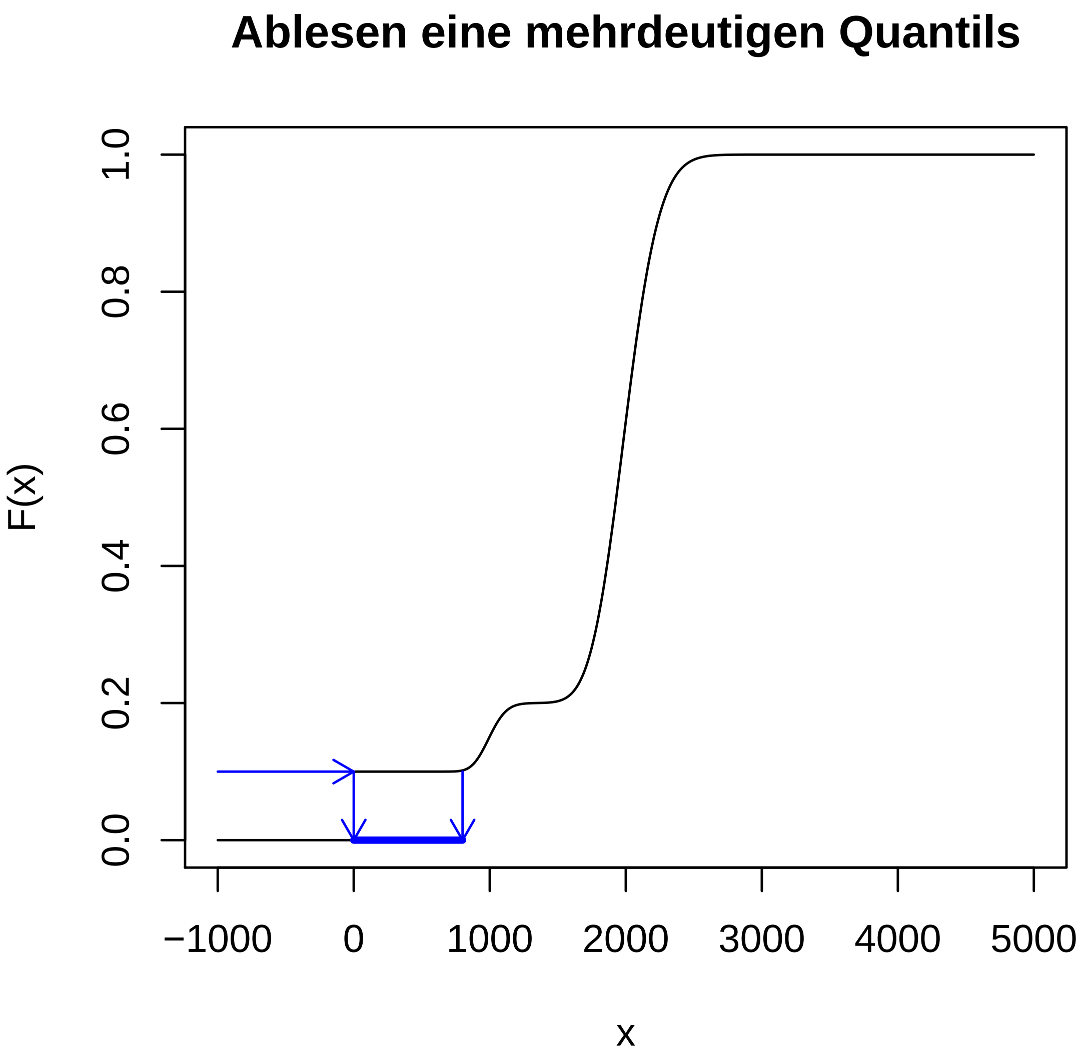


Theoretische Quantile



$F^{-1}(\ )$

Theoretische Quantile



Andere Lageparameter

Theoretischer Median

$$\mathrm{med}(X) := q_{0.5}$$

Streuungsparameter

Def: Die (theoretische) **Varianz**:

$$\mathrm{var}(X) = E[(X - E[X])^2]$$

also die erwartete quadratische Abweichung vom Erwartungswert.

Streuungsparameter

Def: Die (theoretische) **Varianz**:

$$\mathrm{var}(X) = E[(X - E[X])^2]$$

Die (theoretische) **Standardabweichung**:

$$\mathrm{sd}(X) = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$$

also die Wurzel der Varianz.

Streuungsparameter

Def: Die (theoretische) **Varianz**:

$$\mathrm{var}(X) = E[(X - E[X])^2]$$

Die (theoretische) **Standardabweichung**:

$$\mathrm{sd}(X) = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$$

Die **Mittlere Absolute Abweichung** (mean absolute deviation).

$$mad(X) = E[|X - \mathrm{med}(X)|]$$

Anwendung

Streuparameter, insbesondere die Varianz werden eingesetzt in:

- Wahrscheinlichkeitsabschätzungen
- Parameterschätzung
- Fehlerrechnung
- Für statistische Nachweise in t-Tests und Varianzanalyse

Tschebyschewsche-Ungleichung + ...

Satz:

$$
\begin{aligned}
P(|X - E[X]|^2 \geq \epsilon^2) &\leq \frac{\mathrm{var}(X)}{\epsilon^2} \\
P\left(|X - E[X]| \geq \epsilon\right) &\leq \frac{\mathrm{var}(X)}{\epsilon^2} \\
P(|X - \mathrm{med}(X)| \geq \epsilon) &\leq \frac{\mathrm{mad}(X)}{\epsilon}
\end{aligned}
$$

Markov zum Vergleich: Für $X > 0$

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{E[X]}{\epsilon}$$

Schätzung der Varianz

Aus einer repräsentativen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ wird die Varianz üblicherweise geschätzt durch:

$$\hat{\mathrm{var}}(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

Grund: Mit $\frac{1}{n}$ wird es im Mittel zu klein.

$$E[\hat{\mathrm{var}}(X)] = \mathrm{var}(X)$$

$$E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{n-1}{n} \mathrm{var}(X)$$

Schätzung der anderen Streuparamter

$$\hat{\text{sd}}(X) = \sqrt{\hat{\text{var}}(X)}$$

$$\hat{\text{mad}}(X) = \sum_{i=1}^{n} |X_i - \hat{\text{med}}(X)|$$

Aber

$$E[\hat{\text{sd}}(X)] \neq \text{sd}(X)$$

$$E[\hat{\text{mad}}(X)] \neq \text{mad}(X)$$

Grundlagen zur Schätzung von Parametern

Motivation Schätzung

- Ein konzeptionelles Modell der Vorgänge liefert meist ein Verteilungsmodell.
  wie z.B. $X \sim Bi(4, p)$

Motivation Schätzung

- Ein konzeptionelles Modell der Vorgänge liefert meist ein Verteilungsmodell.
- Darin sind meist Parameter enthalten deren Wert man nicht kennt. Hier z.B. ist meist p unbekannt.

Motivation Schätzung

- Ein konzeptionelles Modell der Vorgänge liefert meist ein Verteilungsmodell.
- Darin sind meist Parameter enthalten deren Wert man nicht kennt.
- Diese Parameter müssen wir aus Daten schätzen. Hier z.B. mit $p = \frac{\text{Anzahl Triebwerksausfälle}}{\text{Anzahl Versuch}}$.

Motivation Schätzung

- Ein konzeptionelles Modell der Vorgänge liefert meist ein Verteilungsmodell.
- Darin sind meist Parameter enthalten deren Wert man nicht kennt.
- Diese Parameter müssen wir aus Daten schätzen.
- Ich will Ihnen mitgeben wie das geht.
  Schön blöd.

Motivation Schätzung

- Ein konzeptionelles Modell der Vorgänge liefert meist ein Verteilungsmodell.
- Darin sind meist Parameter enthalten deren Wert man nicht kennt.
- Diese Parameter müssen wir aus Daten schätzen.
- Ich will Ihnen mitgeben wie das geht.
- Sie müssen dazu grundsätzlich verstehen, wie statistische Schätzung funktioniert. Man muß kein Bohrmaschine bauen können, um damit Löcher zu bohren, aber man sollte eine Idee von Drehmomenten haben, um sich nicht zu verletzen.

Beispiel: Schätzer

- Der Mittelwert $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ wird als Schätzer für den Erwartungswert $E[X]$ verwendet.

Beispiel: Schätzer

- Der Mittelwert $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ wird als Schätzer für den Erwartungswert $E[X]$ verwendet.
- Der Erwartungswert ist die theoretische Größe, die wir nicht kennen.

Beispiel: Schätzer

- Der Mittelwert $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ wird als Schätzer für den Erwartungswert $E[X]$ verwendet.
- Der Erwartungswert ist die theoretische Größe, die wir nicht kennen.
- Der Mittelwert ist eine Größe, die wir aus den Daten ausrechnen können.

Beispiel: Schätzer

- Der Mittelwert $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ wird als Schätzer für den Erwartungswert $E[X]$ verwendet.
- Der Erwartungswert ist die theoretische Größe, die wir nicht kennen.
- Der Mittelwert ist eine Größe, die wir aus den Daten ausrechnen können.
- Der Mittelwert ist nicht gleich dem Erwartungswert.

Beispiel: Schätzer

- Der Mittelwert $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ wird als Schätzer für den Erwartungswert $E[X]$ verwendet.
- Der Erwartungswert ist die theoretische Größe, die wir nicht kennen.
- Der Mittelwert ist eine Größe, die wir aus den Daten ausrechnen können.
- Der Mittelwert ist nicht gleich dem Erwartungswert.
- Der Mittelwert konvergiert nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gegen den Erwartungswert. (konsistent)

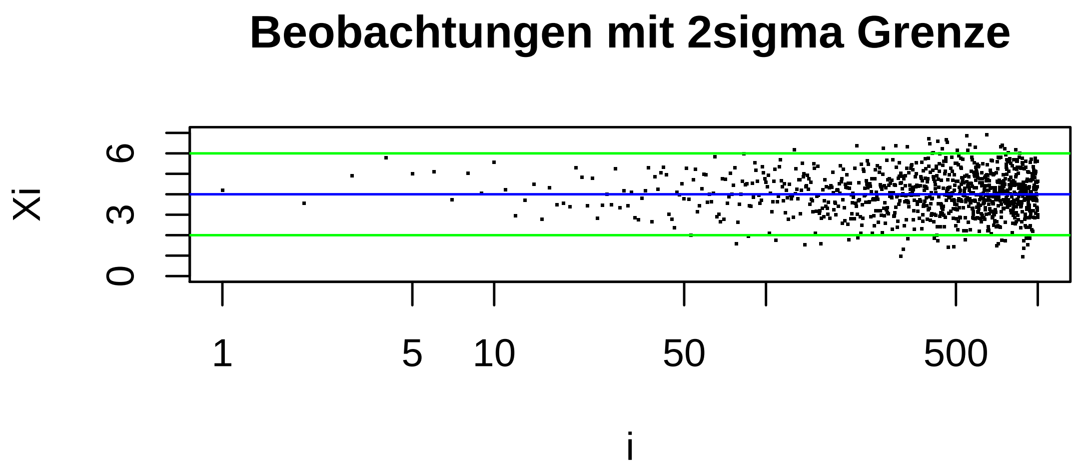
Beispiel: Schätzer

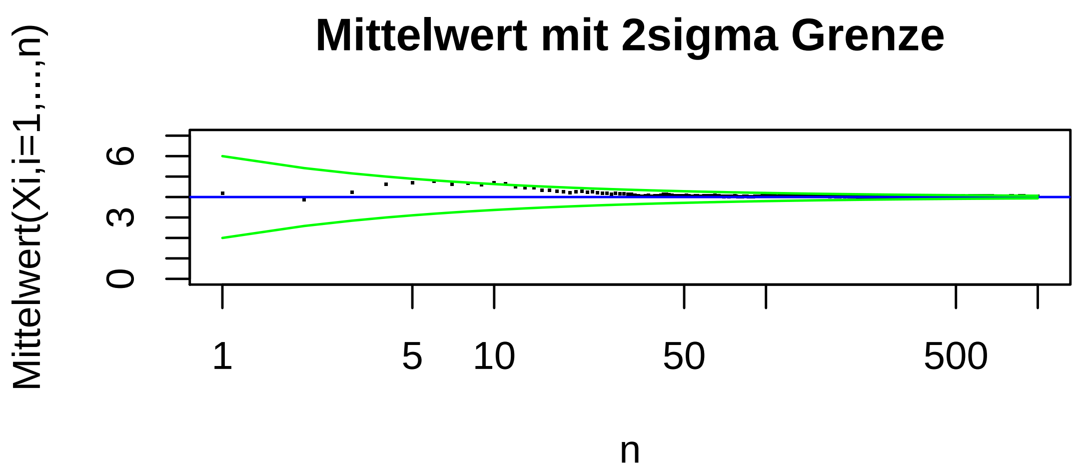
- Der Mittelwert $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ wird als Schätzer für den Erwartungswert $E[X]$ verwendet.
- Der Erwartungswert ist die theoretische Größe, die wir nicht kennen.
- Der Mittelwert ist eine Größe, die wir aus den Daten ausrechnen können.
- Der Mittelwert ist nicht gleich dem Erwartungswert.
- Der Mittelwert konvergiert nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gegen den Erwartungswert. (konsistent)
- Der Mittelwert hat den Erwartungswert als Erwartungswert:

$$E[\bar{X}] = E[X]$$

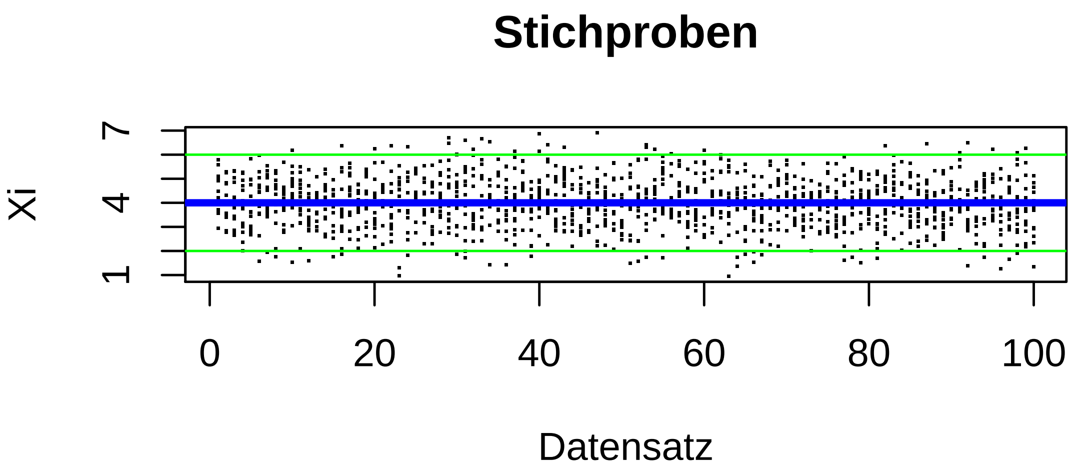
Man schätzt also im Mittel richtig. (erwartungstreu)

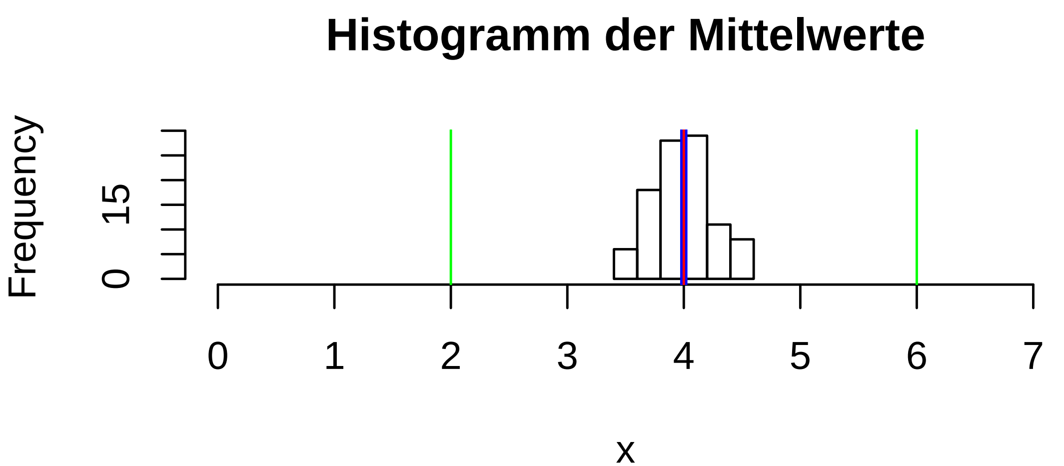
Konsistenz des Mittelwertes





Erwartungstreue des Mittelwertes





Schätzer

- **Def:** Eine Funktion der Daten, welche den Wert eines Parameters ungefähr ermitteln soll heißt Schätzer.
- Ein Schätzer wird mit dem Namen des Parameters und einem Dach darüber notiert: z.B. $\hat{\mu}$, $\widehat{\mathrm{var}}(X)$, $\hat{\sigma}$, $\hat{p}, \hat{n}$
- Der Schätzer ist selbst Zufallsvariable.
- Sein Wert ist zufällig.

Erwartungstreue

Def:
Ein Schätzer $\hat{S}(X_1, \ldots, X_n)$ heißt “**erwartungstreu**” für einen Parameter S wenn gilt:

$$E[\hat{S}(X_1, \ldots, X_n)] = S$$

Konsistenz

Def:
Ein Folge von Schätzern $\hat{S}_n(X_1, \ldots, X_n),\ n = n_0, \ldots, \infty$ heißt "**stark konsistent**" für einen Parameter S wenn gilt:

$$P(\lim_{n\to\infty} E[\hat{S}_n(X_1, \ldots, X_n)] = S) = 1$$

Starkes Gesetz der großen Zahlen

Satz: Für den Mittelwert

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

gilt:

$$E[\bar{X}] = E[X]$$

$$P(\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = E[X]) = 1$$

Voraussetzung: $X_i, i = 1, \ldots, \infty$ sind i.i.d. (repräsentativ) und der Erwartungswert existiert.

Varianzschätzung

Satz: Für den die empirische Varianz

$$\hat{\mathrm{var}} X_n := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

gilt:

$$E[\hat{\mathrm{var}} X] = \mathrm{var}(X)$$

$$P(\lim_{n\to\infty} \hat{\mathrm{var}}_n(X) = \mathrm{var}(X)) = 1$$

Voraussetzung: $X_i, i = 1, \ldots, \infty$ sind i.i.d. (repräsentativ) und Erwartungswert und Varianz existieren.

Konsistenzsatz für $\hat{F}$

Satz: Für die empirische Verteilungsfunktion gilt:

$$E[\hat{F}_n(x)] = F_X(x)$$

$$P(\text{Für alle } x \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} \hat{F}_n(x) = F_X(x)) = 1$$

Voraussetzung: $X_i, i = 1, \ldots, \infty$ sind i.i.d. (repräsentativ)

Zusammenfassung

Die folgenden Schätzer sind erwartungstreu und (stark) konsistent:

- Mittelwert für den Erwartungswert
- empirische Varianz für die theoretische Varianz
- empirische Verteilungsfunktion für die Verteilungsfunktion

Rezepte für konsistente Schätzer

Wenn Sie einen Parameter schätzen wollen, können Sie folgendes versuchen:

- Stellen Sie fest, ob sich der Parameter stetige Funktion einer oder mehrer konsistent schätzbarer Größen schreiben läßt.
- Schätzen sie diese Größen konsistent.
- Wenden Sie die Funktion an.
- Sie erhalten eine konsistente Schätzung, da ja

$$P(\lim_{n\to\infty} G(\hat{p}_n) = G(\lim_{n\to\infty} \hat{p}_n) = p) = 1$$

Beispiel

Binomalverteilung $Bi(4, n)$:

$$E[X] = 4p$$

also

$$p = \frac{1}{4}E[X]$$

$$\hat{p} = \frac{1}{4}\bar{X}$$

Ist konsistenter Schätzer.

Wie geht es weiter?

- Welche Standardmodelle gibt es?
  Ereignis Anzahlen: Binomial, Hypergeometrisch, Poisson
  Versuchsanzahlen: Geometrisch, Negativ Binomial
  Lebensdauern: Exponentiell, Gamma, Weibull
  Störungen: Normal, Lognormal
  Extremalwerte: Weibull, Gumbel, Fr'echet

Wie geht es weiter?

- Welche Standardmodelle gibt es?
- Welches Modell gehört zu welcher Situtation?
  z.B. Binomial $\Leftrightarrow$ n unabhängige Möglichkeiten
  z.B. Poisson $\Leftrightarrow$ viele unabhängige Möglichkeiten
  z.B. Weibull $\Leftarrow$ alternde Maschine
  z.B. Gumbel $\Leftarrow$ überfließender Damm

Wie geht es weiter?

- Welche Standardmodelle gibt es?
- Welches Modell gehört zu welcher Situtation?
- Wie schätzt man die Parameter?
  Formeln, Schätzfehler, Vertrauensbereich,...

Wie geht es weiter?

- Welche Standardmodelle gibt es?
- Welches Modell gehört zu welcher Situtation?
- Wie schätzt man die Parameter?
- Wie kann man mit den Modellen weiterrechnen?
  Rechengesetze, Zusammenhänge, Fehlerrechnung,...