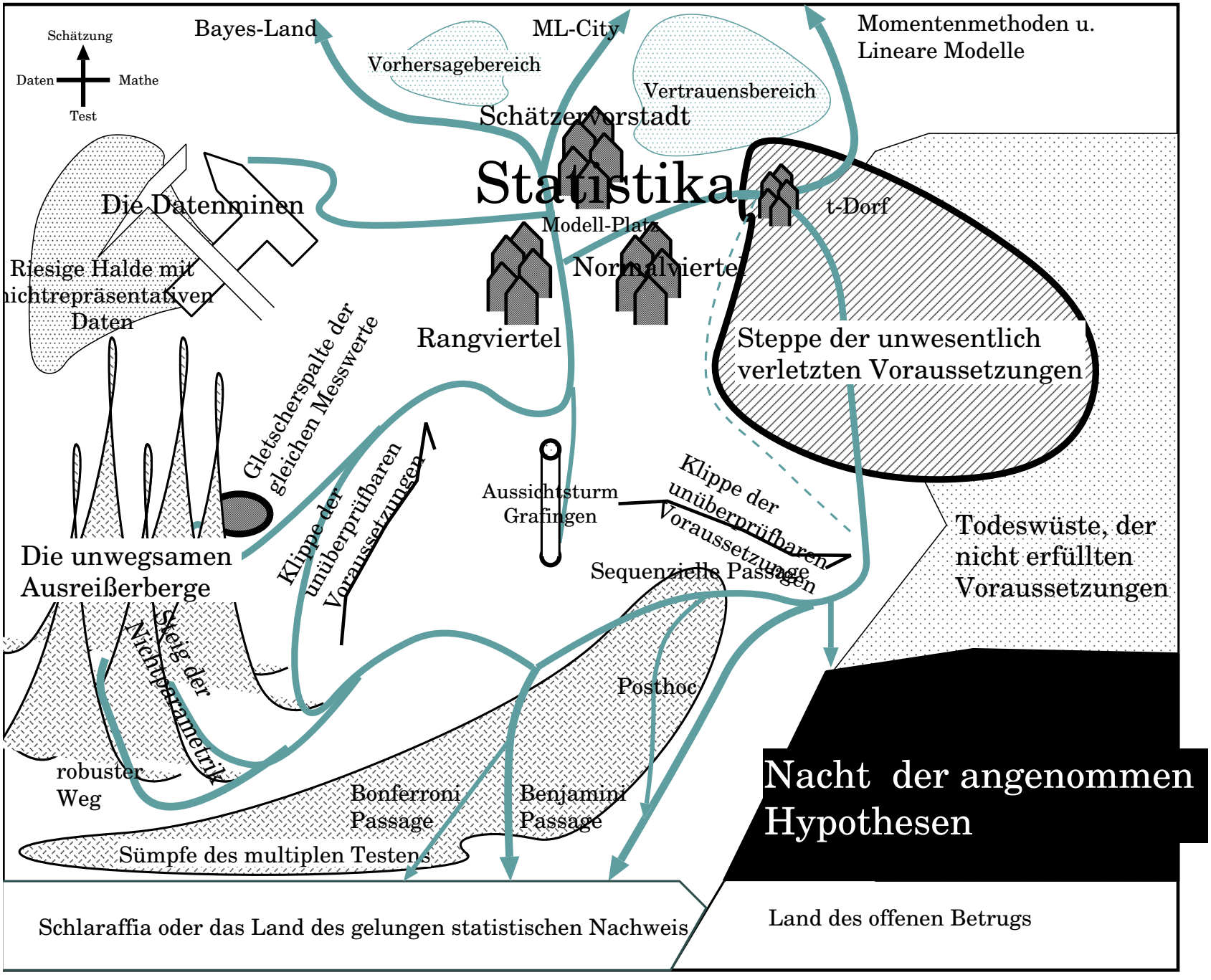
Datenanalyse und Statistik

Vorlesung 8 (Lineare Modelle)

K.Gerald van den Boogaart
http://www.stat.boogaart.de

9. Dezember 2019


Schätzung
Daten
Mathe
Test
Bayes-Land
ML-City
Vorhersagebereich
Vertrauensbereich
Momentenmethoden u.
Lineare Modelle
Schätzervorstadt
Statistika
Die Datenminen
Modell-Platz
t-Dorf
Riesige Halde mit
nichtrepräsentativen
Daten
Normalviertel
Rangviertel
Steppe der unwesentlich
verletzten Voraussetzungen
Gletscherspalte der
gleichen Messwerte
Klippe der
unüberprüfbaren
Voraussetzungen
Aussichtsturm
Grafingen
Klippe der
unüberprüfbaren
Voraussetzungen
Todeswüste, der
nicht erfüllten
Voraussetzungen
Die unwegsamen
Ausreißerberge
Sequenzielle Passage
Steig der
Nichtparametrik
Posthoc
robuster
Weg
Bonferroni
Passage
Benjamini
Passage
Sümpfe des multiplen Testens
Nacht der angenommen
Hypothesen
Schlaraffia oder das Land des gelungen statistischen Nachweis
Land des offenen Betrugs

Lineare Modelle

Def:

Statistische Modelle der Form:

$$Y_i = c_0 + c_1 f_1(X_i) + c_2 f_2(X_i) + \ldots c_p f_p(X_i) + \epsilon_i$$

mit $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$
(wobei X_i eine Reihe von Einflußgrößen darstellt)
heißen **lineare Modelle**.

Wiederholung Lineare Regression

Wir hatten eine Modellvorstellung:

$$Y_i = a + bX_i + \epsilon_i$$

Wiederholung Lineare Regression

Wir hatten eine Modellvorstellung:

$$Y_i = a + bX_i + \epsilon_i$$

wobei a, b unbekannte Parameter,

Wiederholung Lineare Regression

Wir hatten eine Modellvorstellung:

$$Y_i = a + bX_i + \epsilon_i$$

wobei a, b unbekannte Parameter,
ϵ_i (normalverteilter) stochastisch unabhängige Fehler mit konstanter Varianz σ^2

Wiederholung Lineare Regression

Wir hatten eine Modellvorstellung:

$$Y_i = a + bX_i + \epsilon_i$$

wobei a, b unbekannte Parameter,
ϵ_i (normalverteilter) stochastisch unabhängige Fehler mit konstanter Varianz σ^2
und X_i reelle Einflußgrößen sind.

Lineare Regression als Lineares Modell

Lineare Regression:

$$Y_i = a + bX_i + \epsilon_i, \quad \epsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

Lineare Regression als Lineares Modell

Lineare Regression:

$$Y_i = a + bX_i + \epsilon_i, \quad \epsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

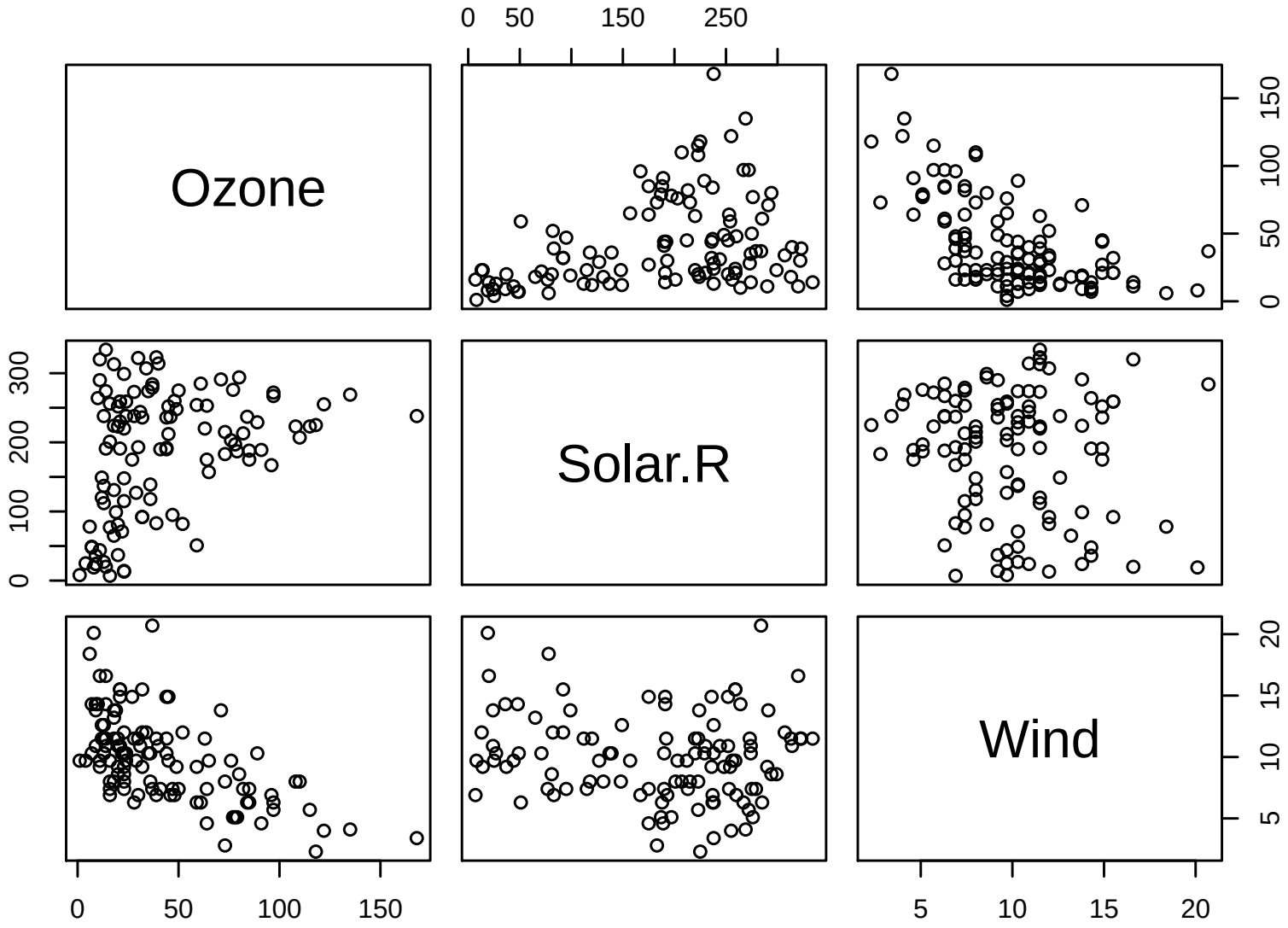
als lineares Modell:

$$Y_i = a + bf_1(X_i) + \epsilon_i, \quad \epsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

mit

$$f_1(X) = X$$

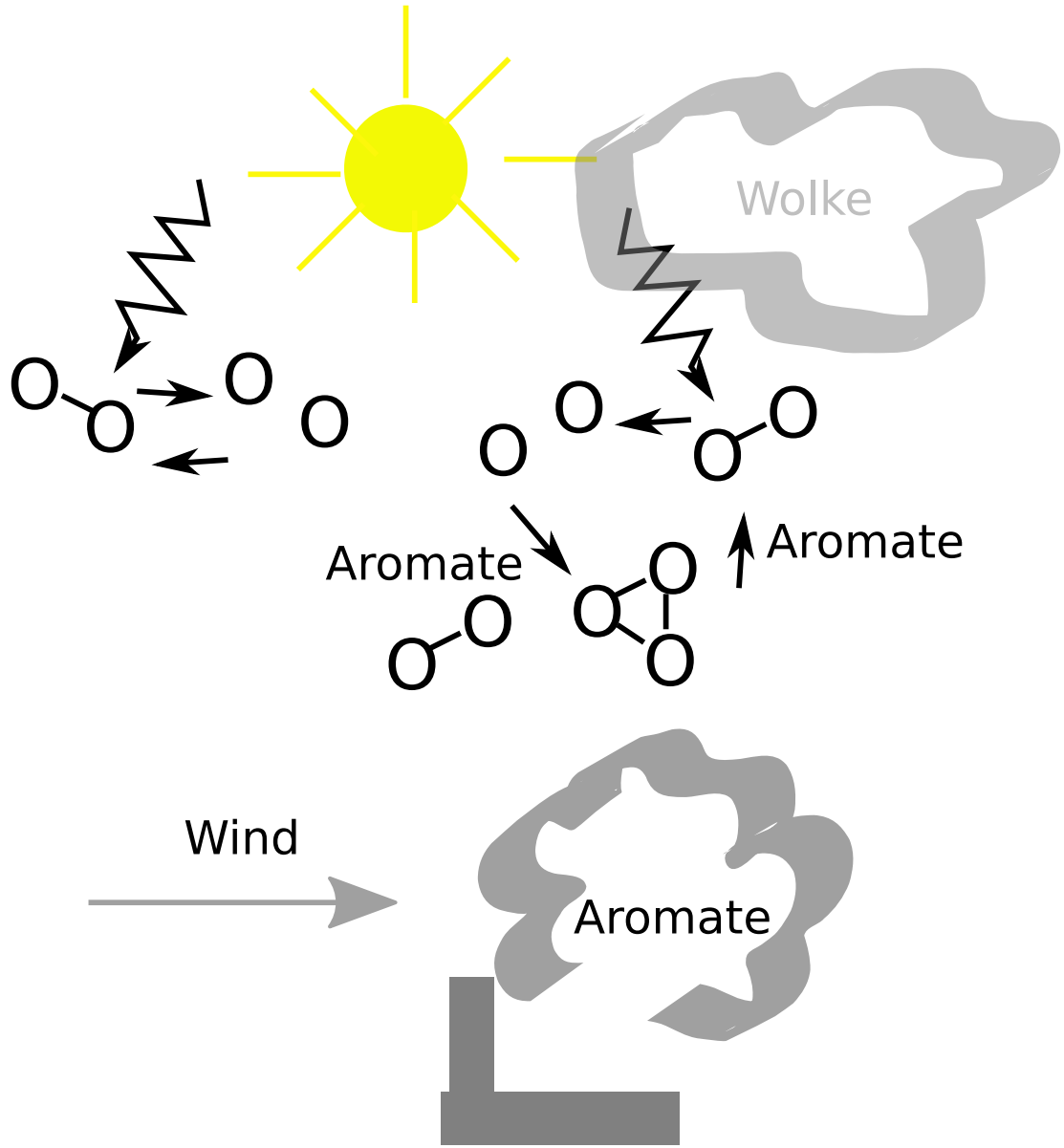
Beispiel: Ozon (städtisch)



Beobachtungen

- Sonnenstrahlung erhöht das Ozon
- Wind reduziert das Ozon

Modell der Ozonentstehung



Einstrahlung: Parameter

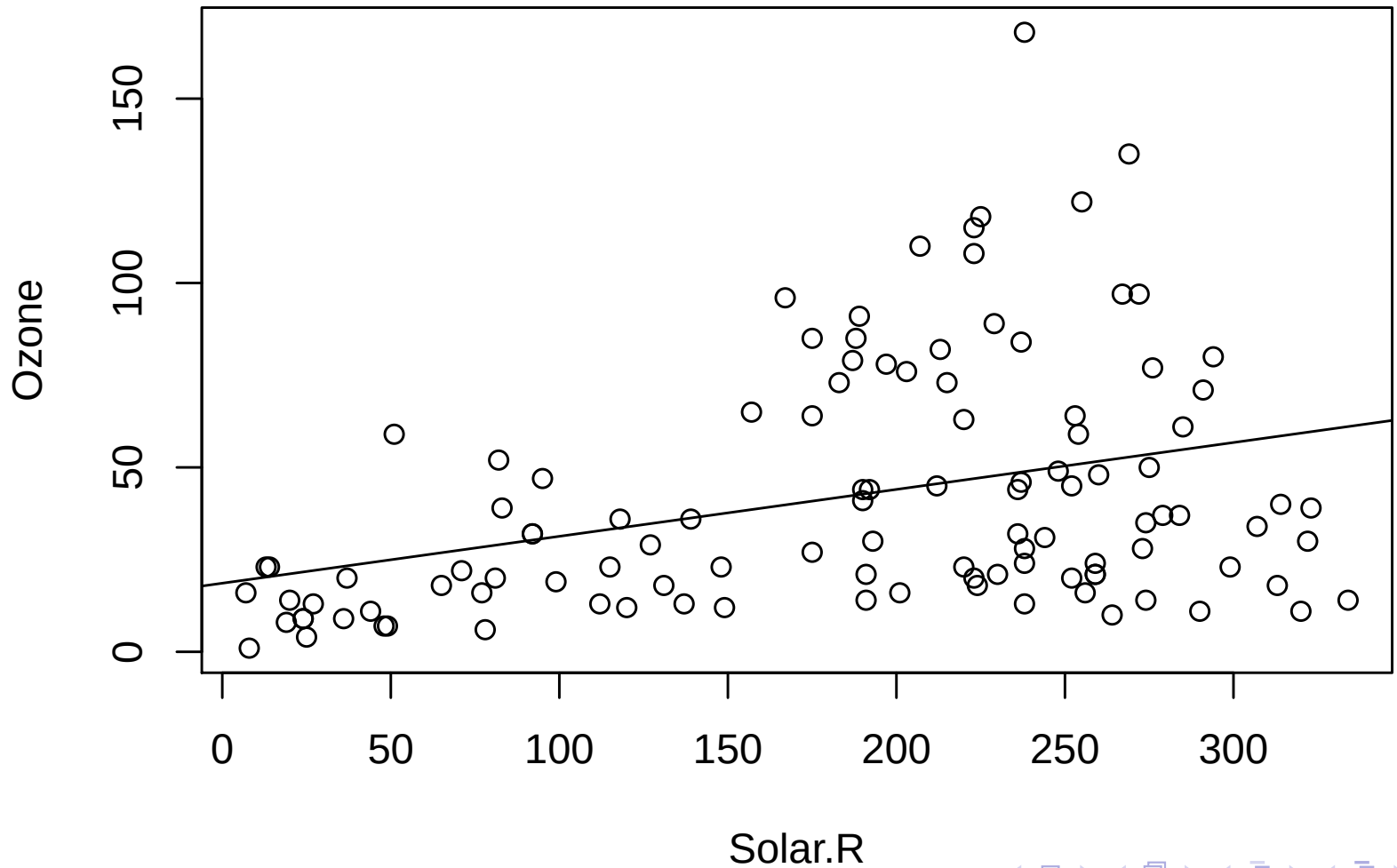
```
> mod <- lm(Ozone~Solar.R,data=ozon)
> mod

Call:
lm(formula = Ozone ~ Solar.R, data = ozon)

Coefficients:
(Intercept)      Solar.R
     18.599        0.127
```

Einstrahlung: Varianzanalysetabelle

```
> anova(mod)

Analysis of Variance Table

Response: Ozone
           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
Solar.R     1  14780   14780    15.1 0.00018
Residuals 109 107022     982

> R2(mod)

[1] 0.1213
```

Einstrahlung: Regressionsgerade

```
> plot(Ozone~Solar.R,data=ozon)
> abline(mod)
```



Wind: Parameter

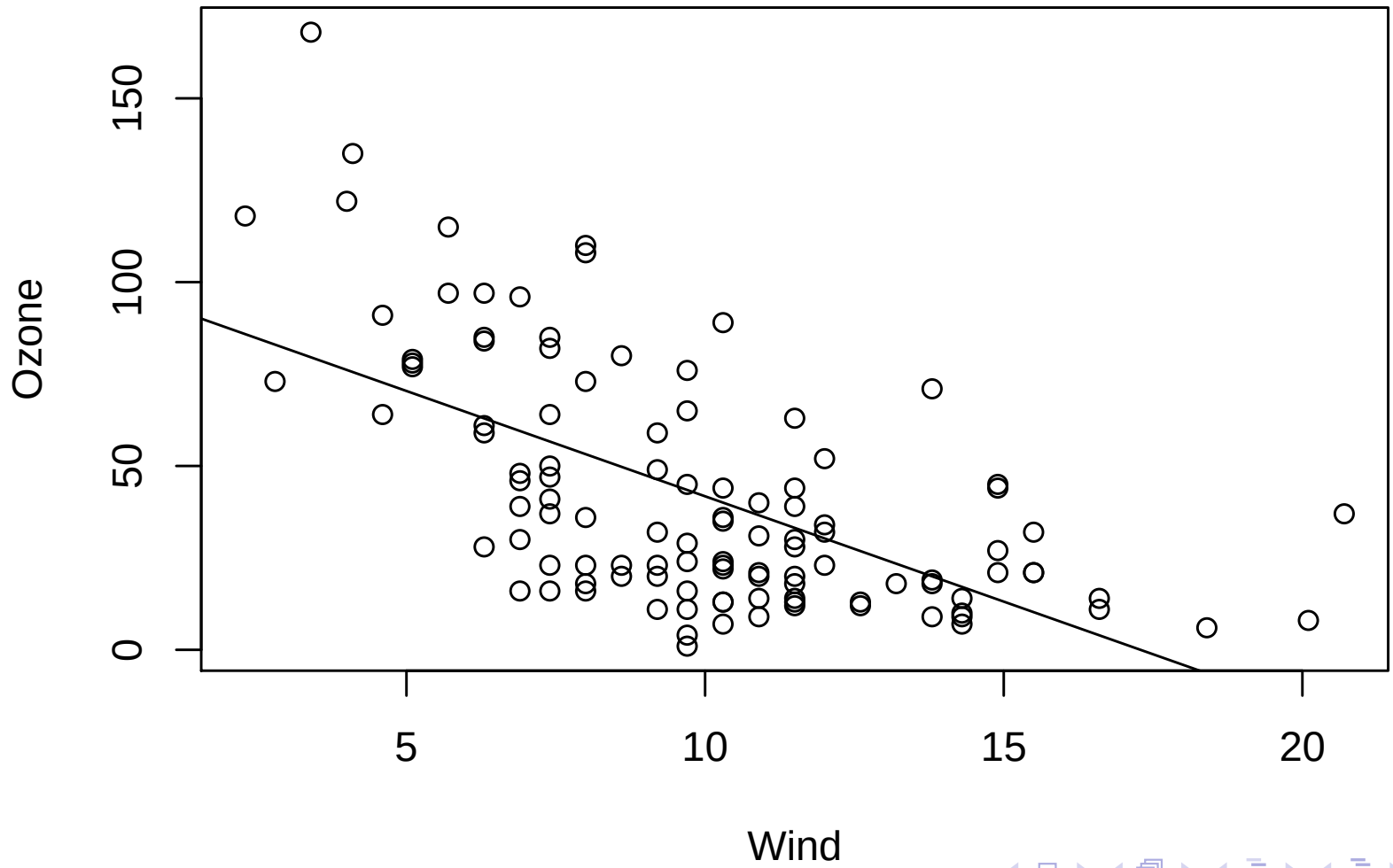
```
> mod <- lm(Ozone~Wind,data=ozon)
> mod

Call:
lm(formula = Ozone ~ Wind, data = ozon)

Coefficients:
(Intercept)         Wind
      99.04        -5.73
```

Wind: Tests

```
> anova(mod)
Analysis of Variance Table

Response: Ozone
           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
Wind        1  45694   45694    65.4 9.1e-13
Residuals 109  76108     698

> R2(mod)
[1] 0.3752
```

Wind: Gerade

```
> plot(Ozone~Wind,data=ozon)
> abline(mod)
```



Konzeptionelles Modell

- Ozon entsteht im Umfeld der Verschmutzung durch Sonneneinstrahlung.
- Wind verbläst das enstandene Ozon.
- Problem: Wind und wenig Sonne gehen oft Hand in Hand.
- Beide Einflüsse sind also wichtig.

Multiples Regressionsmodell

Modell 1 (lineare Regression):

$$\text{“}\texttt{Ozone}\text{”}_i = a + b\text{“}\texttt{Solar.R}\text{”}_i + \epsilon_i$$

Modell 2 (lineare Regression):

$$\text{“}\texttt{Ozone}\text{”}_i = a + b\text{“}\texttt{Wind}\text{”}_i + \epsilon_i$$

Kombiniertes Modell (multiple Regression):

$$\text{“}\texttt{Ozone}\text{”}_i = a + b\text{“}\texttt{Wind}\text{”}_i + c\text{“}\texttt{Solar.R}\text{”}_i + \epsilon_i$$

Multiple Regression

- Man hat einen Parameter mehr.
- Die Bestimmung der Parameter wird komplizierter, aber die gleiche Idee der minmalen quadratischen Fehler funktioniert wieder.
- Man kann das natürlich auch mit mehrern Verschiednen Einflüssen machen.
- Daher der Name: Multiple Regression.

Multiple Regression als Lineares Modell

Lineare Regression:

$$Y_i = a + bf_1\left(\begin{pmatrix} \texttt{“Wind”}_i \\ \texttt{“Solar.R”}_i \end{pmatrix}\right) + cf_2\left(\begin{pmatrix} \texttt{“Wind”}_i \\ \texttt{“Solar.R”}_i \end{pmatrix}\right) + \epsilon_i$$

$\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$,
mit

$$\begin{aligned} f_1\left(\begin{pmatrix} \texttt{“Wind”} \\ \texttt{“Solar.R”} \end{pmatrix}\right) &= \texttt{“Wind”} \\ f_2\left(\begin{pmatrix} \texttt{“Wind”} \\ \texttt{“Solar.R”} \end{pmatrix}\right) &= \texttt{“Solar.R”} \end{aligned}$$

Parameter

```
> mod <- lm(Ozone~Wind+Solar.R,data=ozon)
> mod

Call:
lm(formula = Ozone ~ Wind + Solar.R, data = ozon)

Coefficients:
(Intercept)         Wind      Solar.R
       77.2         -5.4          0.1
```

$$\text{“Ozone”}_i = 77.25 - 5.40 \cdot \text{“Wind”}_i + 0.10 \cdot \text{“Solar.R”} + \epsilon_i$$

Notation für Modelle

Die meisten Programme verwenden eine Notation zur Beschreibung es genauen Modells. Hier z.B.

```
Ozone~Wind+Solar.R
```

Mit der Bedeutung:

- `Ozone` ist der Regressant
- `Wind` ist Regressor
- `Solar.R` ist Regressor
- Die beiden Einflüsse sollen addiert werden.

$$\text{“}\texttt{Ozone}\text{”} = a + b \cdot \text{“}\texttt{Wind}\text{”}_i + c \cdot \text{“}\texttt{Solar.R}\text{”}_i + \epsilon_i$$

Varianzanalysetabelle

```
> anova(mod)

Analysis of Variance Table

Response: Ozone
           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
Wind        1  45694   45694    73.6 7.7e-14
Solar.R     1   9055    9055    14.6 0.00022
Residuals 108  67053     621
```

Die Anova-Tests

Diese ANOVA Tabelle enthält zwei Tests:

	$H_0 : Y_i = a + \epsilon_i$
Test Wind	*vs.*
	$H_1 : Y_i = a + b \cdot \text{“}\texttt{Wind}\text{”}_i + \epsilon_i$
Test Solar.R	*vs.*
	$H_2 : Y_i = a + b \cdot \text{“}\texttt{Wind}\text{”}_i + c \cdot \text{“}\texttt{Solar.R}\text{”}_i + \epsilon_i$

In jeder Zeile der Tabelle wird ein Test durchgeführt.

Interpretation der Tests

- Ein signifikanter Test weißt (vorläufig) den Einfluss des Regressors nach.

Interpretation der Tests

- Ein signifikanter Test weißt (vorläufig) den Einfluss des Regressors nach.
- Nach dem Prinzip:
  “So einfach wie mögliche, so kompliziert wie nötig”.

Interpretation der Tests

- Ein signifikanter Test weißt (vorläufig) den Einfluss des Regressors nach.
- Nach dem Prinzip:
  “So einfach wie mögliche, so kompliziert wie nötig”.
- sollten Regressoren mit nicht signifikantem Einflussen entfernt werden,. . .

Interpretation der Tests

- Ein signifikanter Test weißt (vorläufig) den Einfluss des Regressors nach.
- Nach dem Prinzip:
  “So einfach wie mögliche, so kompliziert wie nötig”.
- sollten Regressoren mit nicht signifikantem Einflussen entfernt werden,. . .
- . . . , es sei denn es gibt einen inhaltlichen Grund warum dieser Grund vorhanden sein muß.

Vorläufig, weil . . .

- Wir das Erfülltsein der Voraussetzungen noch nicht geprüft haben.
- Wir noch “Scheineffekte” diskutieren und ausschließen müssen.

Prinzip der sequenziellen Tests

- Für die mehreren Tests innerhalb einer Varianzanalysetabelle wird keine Bonferronie-Korrektur angewendet, da ja das Modell nur dann verwendet wird, wenn alle Tests ablehnen.

Varianzanalysetabelle

```
> anova(mod)

Analysis of Variance Table

Response: Ozone
           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
Wind        1  45694   45694    73.6 7.7e-14
Solar.R     1   9055    9055    14.6 0.00022
Residuals 108  67053     621
```

Bei Effekte sind also vorläufig nachgewiesen.

Voraussetzungen

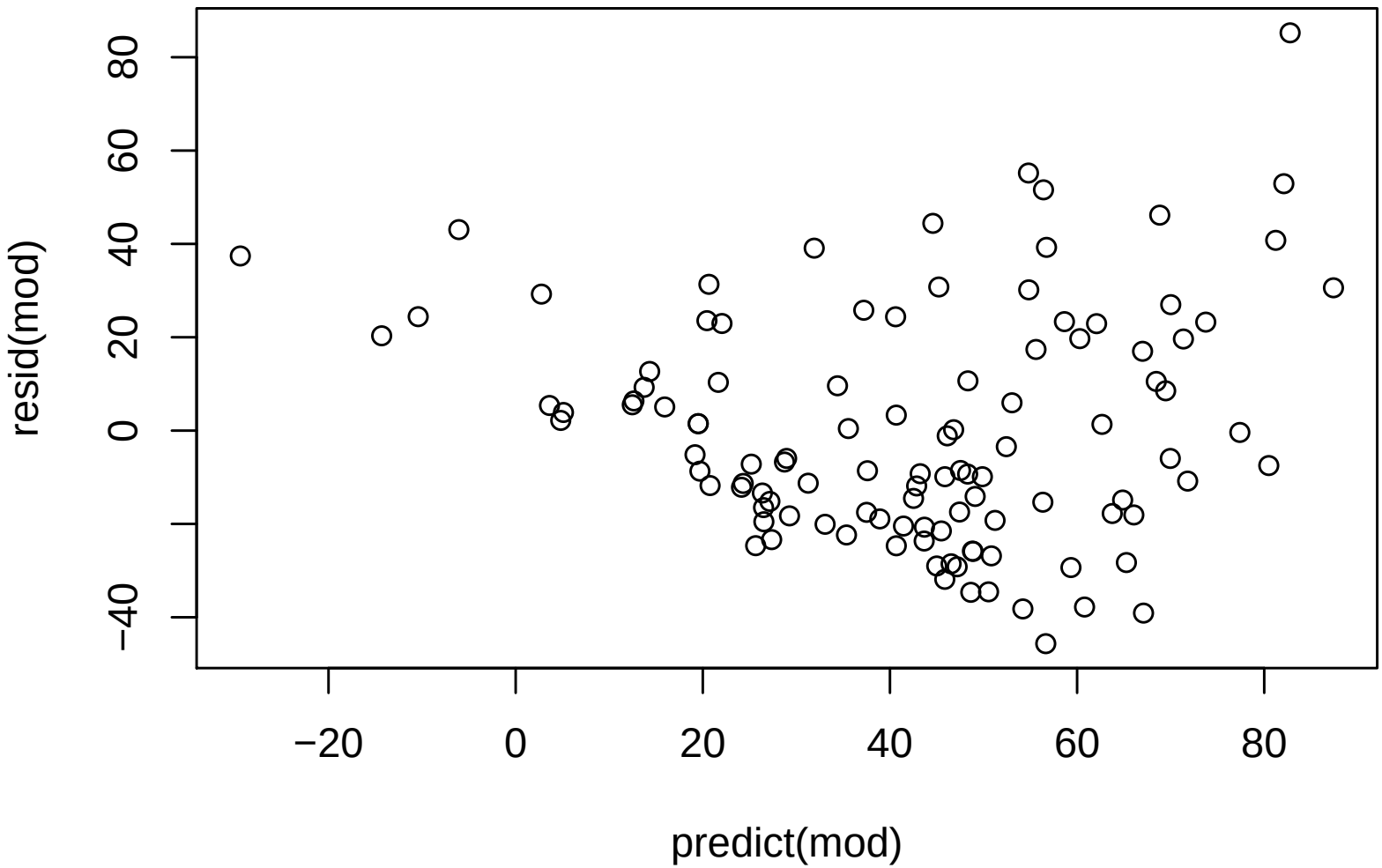
$$Y_i = \text{Formel} + \epsilon_i$$

Die ϵ_i müßen die folgden Eigenschaften haben

- stochastisch unabhängig
- immer die gleiche Varianz
- ungefähr normalverteilt

Residuals vs. Predicted

```
> plot(predict(mod),resid(mod))
```



Heteroskedastizität

- Bei positiv reellen Skalen sieht man oft diese Abhängigkeit der Streuung vom Mittelwert.
- Eine Analyse der Daten auf einer Logrithmischen Skale behebt das Problem oft.
- Für die positive reelle Skala gibt es noch eine Reihe inhaltlicher Argumente für die Verwendung einer logarithmischen Transformation.
- Wir ändern also das Modell.

Parameter

```
> modL <- lm(log(Ozone)~log(Wind)+log(Solar.R),data=ozon)
> modL

Call:
lm(formula = log(Ozone) ~ log(Wind) + log(Solar.R), data =

Coefficients:
 (Intercept)      log(Wind)  log(Solar.R)
       3.694         -1.128         0.448
```

$$\ln(\text{“Ozone”}_i) = 3.7 - 1.13 \cdot \ln(\text{“Wind”}_i) + 0.44 \cdot \ln(\text{“Solar.R”}) + \epsilon_i$$

Varianzanalysetabelle

```
> anova(modL)

Analysis of Variance Table

Response: log(Ozone)
               Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
log(Wind)       1   29.0   28.97    83.5 4.2e-15
log(Solar.R)    1   16.0   16.04    46.2 6.0e-10
Residuals     108   37.5    0.35
```

Vergleich der Erklärungskraft

```
> R2(mod)
[1] 0.4495
> R2(modL)
[1] 0.5458
```

Kriterien für die Modellwahl

- Modell mit nichtsignifikaten Einflüssen (die nicht inhaltlich notwendig sind), gelten als zu kompliziert und werden daher nicht in die Auswahl mit einbezogen.

Kriterien für die Modellwahl

- Modell mit nichtsignifikaten Einflüssen (die nicht inhaltlich notwendig sind), gelten als zu kompliziert und werden daher nicht in die Auswahl mit einbezogen.
- Modelle mit fehlenden Voraussetzungen können nicht direkt eingesetzt werden.

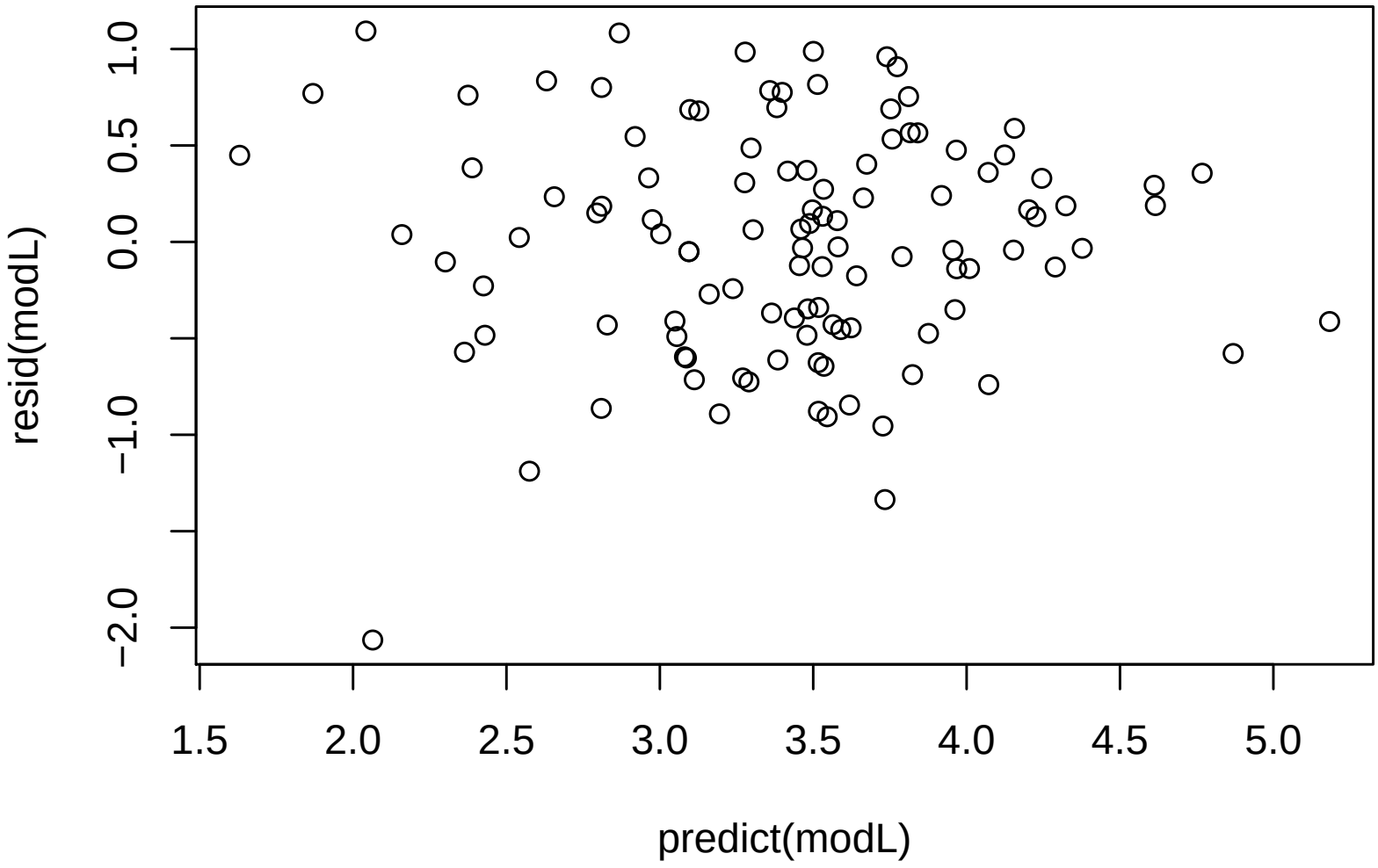
Kriterien für die Modellwahl

- Modell mit nichtsignifikaten Einflüssen (die nicht inhaltlich notwendig sind), gelten als zu kompliziert und werden daher nicht in die Auswahl mit einbezogen.
- Modelle mit fehlenden Voraussetzungen können nicht direkt eingesetzt werden.
- Modellen mit höherem R^2 wird der Vorzug gegeben.

Kriterien für die Modellwahl

- Modell mit nichtsignifikaten Einflüssen (die nicht inhaltlich notwendig sind), gelten als zu kompliziert und werden daher nicht in die Auswahl mit einbezogen.
- Modelle mit fehlenden Voraussetzungen können nicht direkt eingesetzt werden.
- Modellen mit höherem R^2 wird der Vorzug gegeben.
- Modelle mit einer inhaltlichen Interpretation wird der Vorzug gegeben.

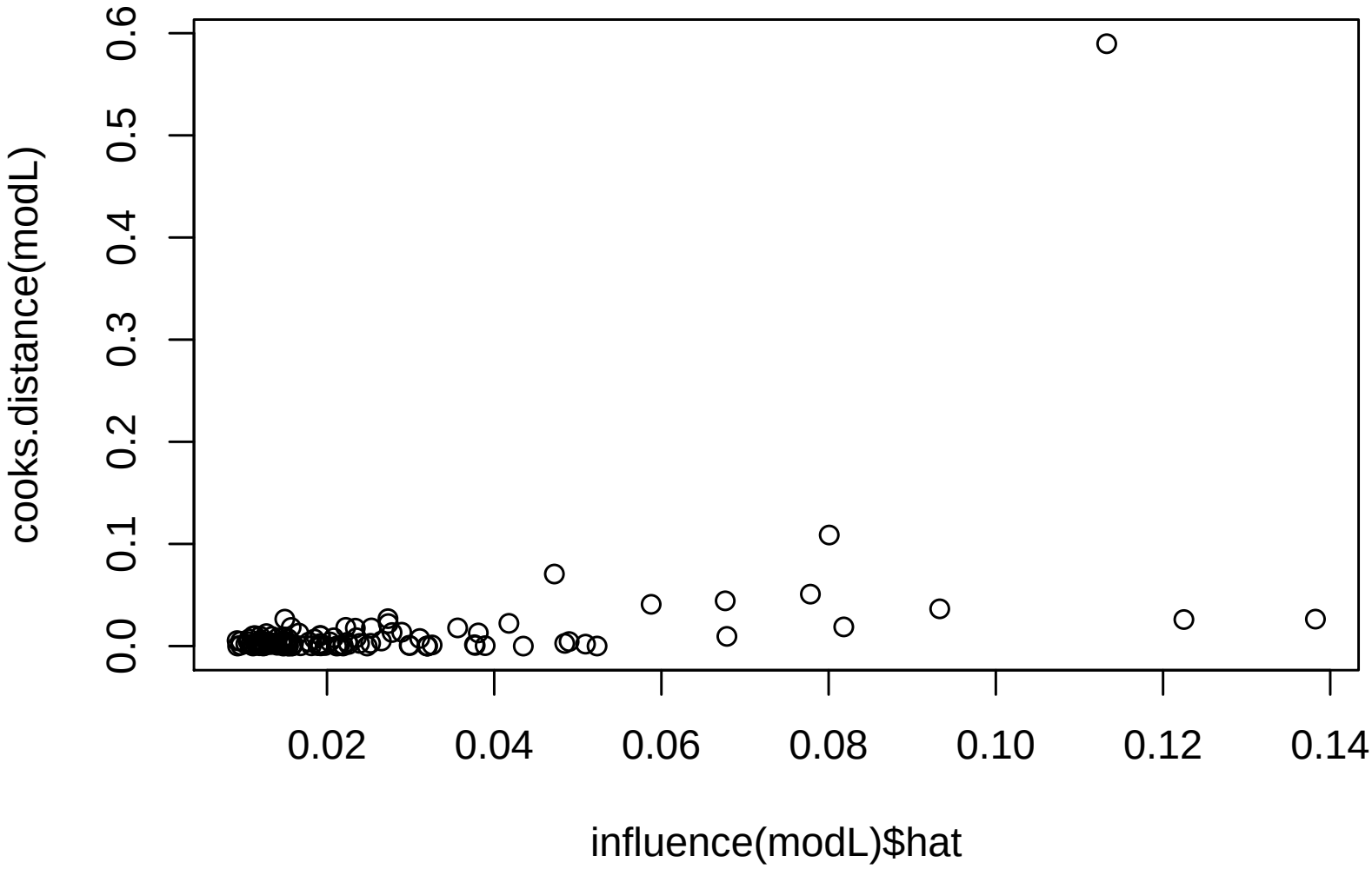
Residuals vs. Predicted



Interpretation

- Nun homoskedastisch.
- Ein Ausreißer ist deutlich sichtbar.

Hebelwirkungen



Möglichkeiten bei Ausreißern

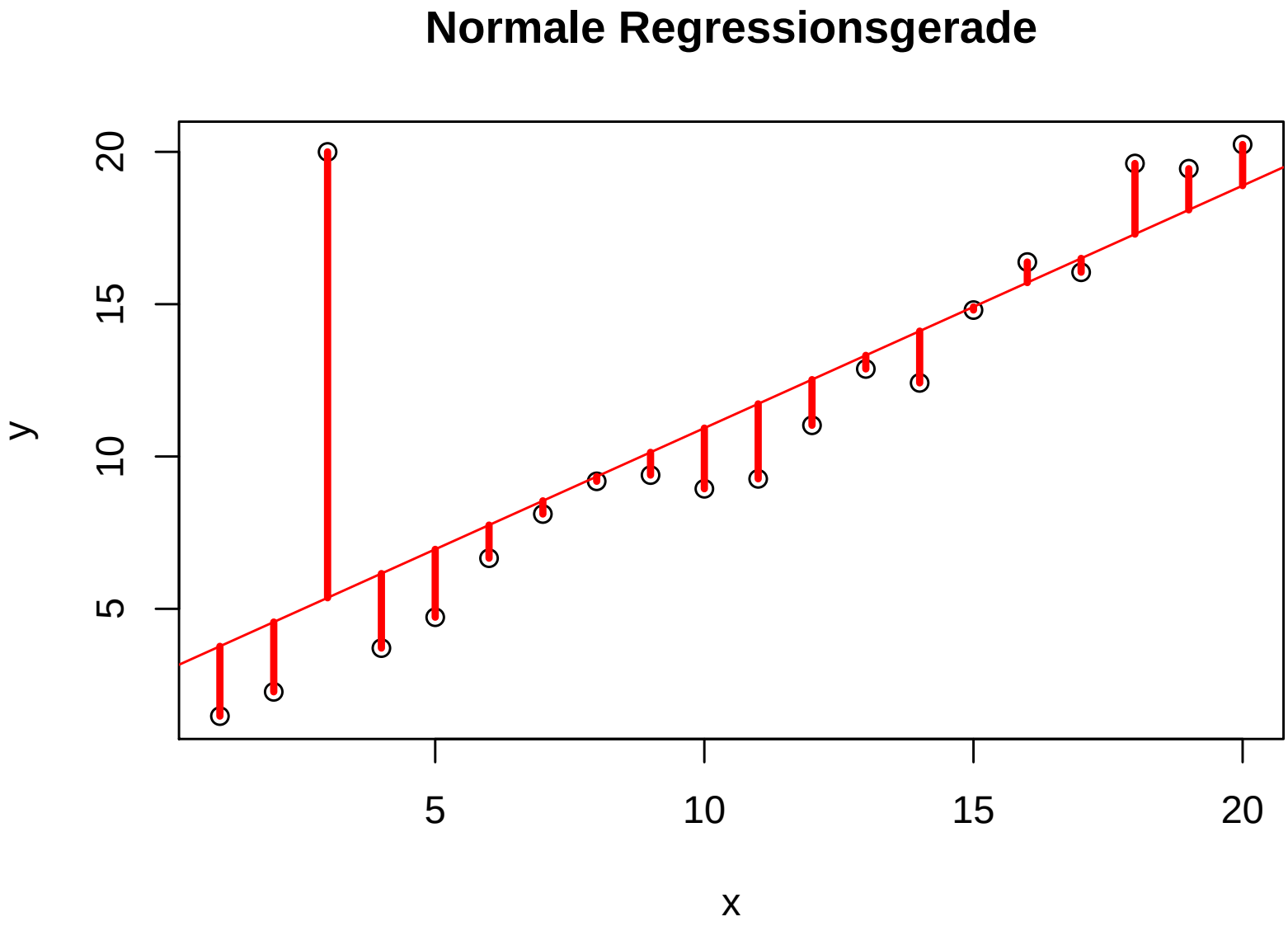
- Robuste Schätzung: Computer ignoriert Ausreißer
- Erkannte Ausreißer entfernen: Problematisch, z.B. wenn man auf diese Weise die Lagerstätte entfernt.
- Den Grund des Ausreißers erforschen.

Robuste Schätzung

```
> require(robust)
> modLR <- lmRob(log(Ozone)~log(Wind)+log(Solar.R),data=ozo
> modLR

Call:
lmRob(formula = log(Ozone) ~ log(Wind) + log(Solar.R), data

Coefficients:
 (Intercept)     log(Wind)  log(Solar.R)
       4.244        -1.156         0.356

> R2(modLR)

[1] 0.5375
```

$$\ln(\text{“Ozone”}_i) = 3.7 - 1.13 \cdot \ln(\texttt{Wind}_i) + 0.44 \cdot \ln(\texttt{Solar.R}) + \epsilon_i$$

Prinzip der robusten Schätzung

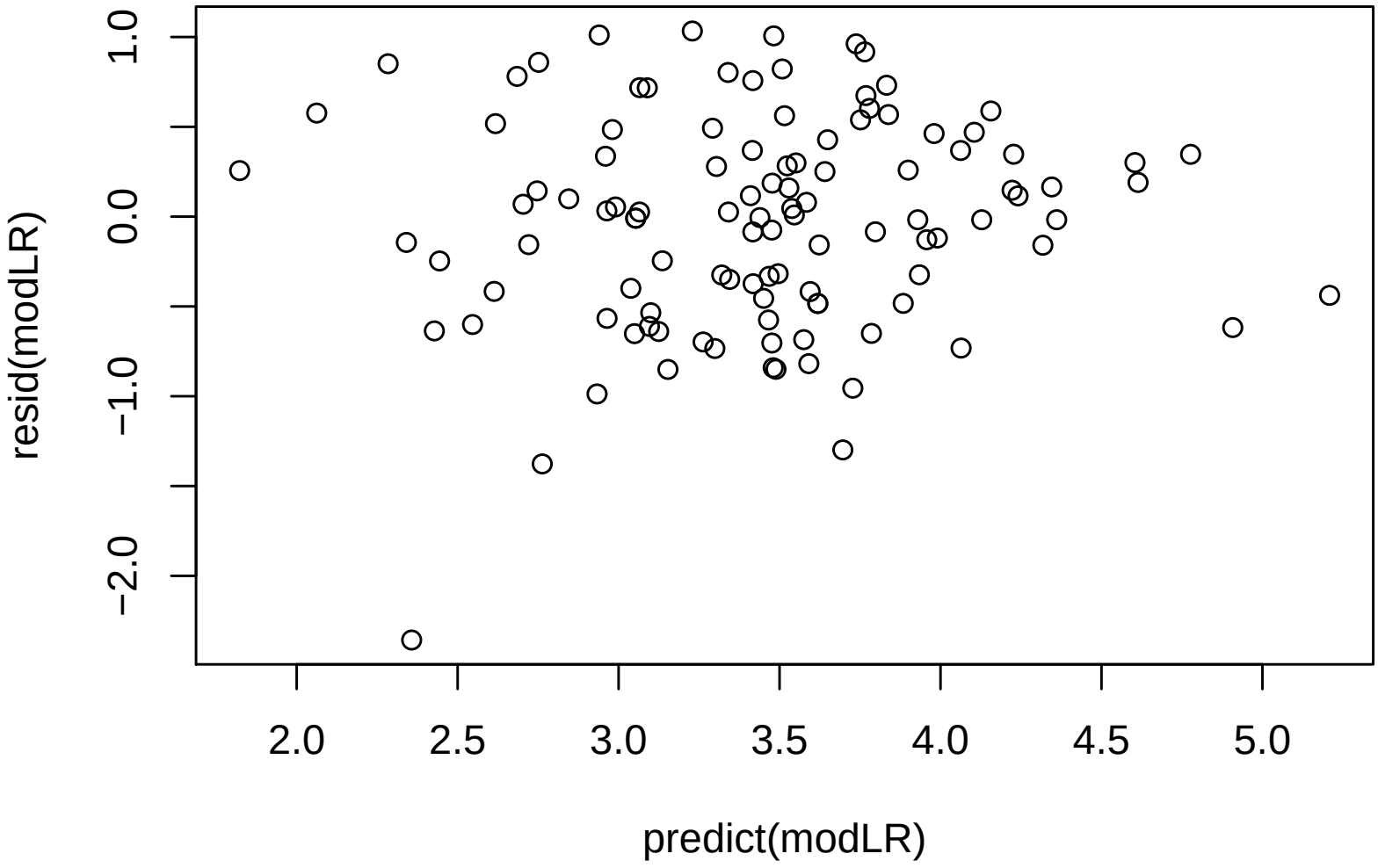


Prinzip der robusten Schätzung

Varianzanalysetabelle

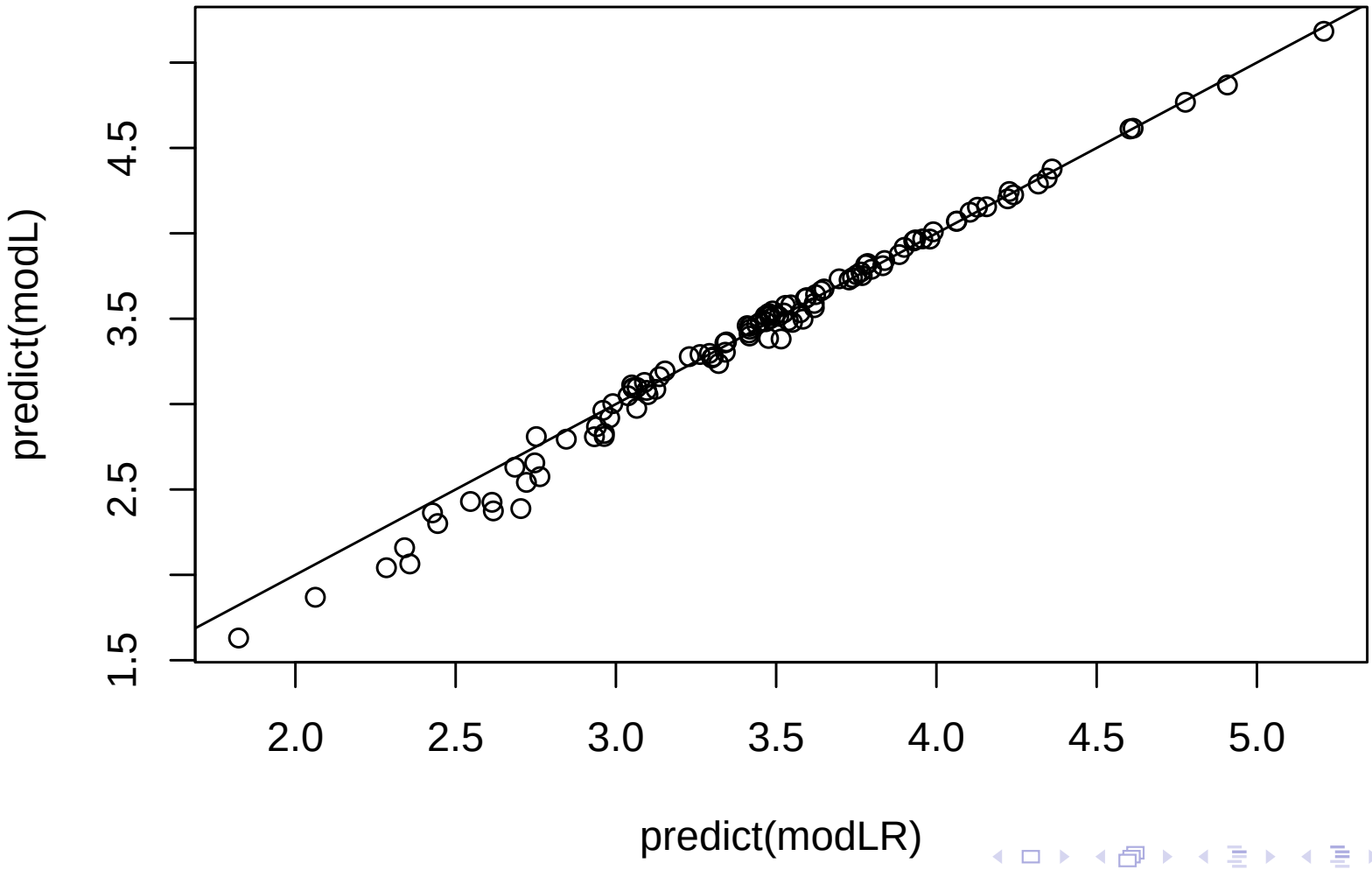
```
> anova(modLR)

Terms added sequentially (first to last)

              Chisq Df RobustF   Pr(F)
(Intercept)           1
log(Wind)             1    63.8 4.4e-16
log(Solar.R)          1    20.5 3.9e-06
```

Residuals vs. Predicted



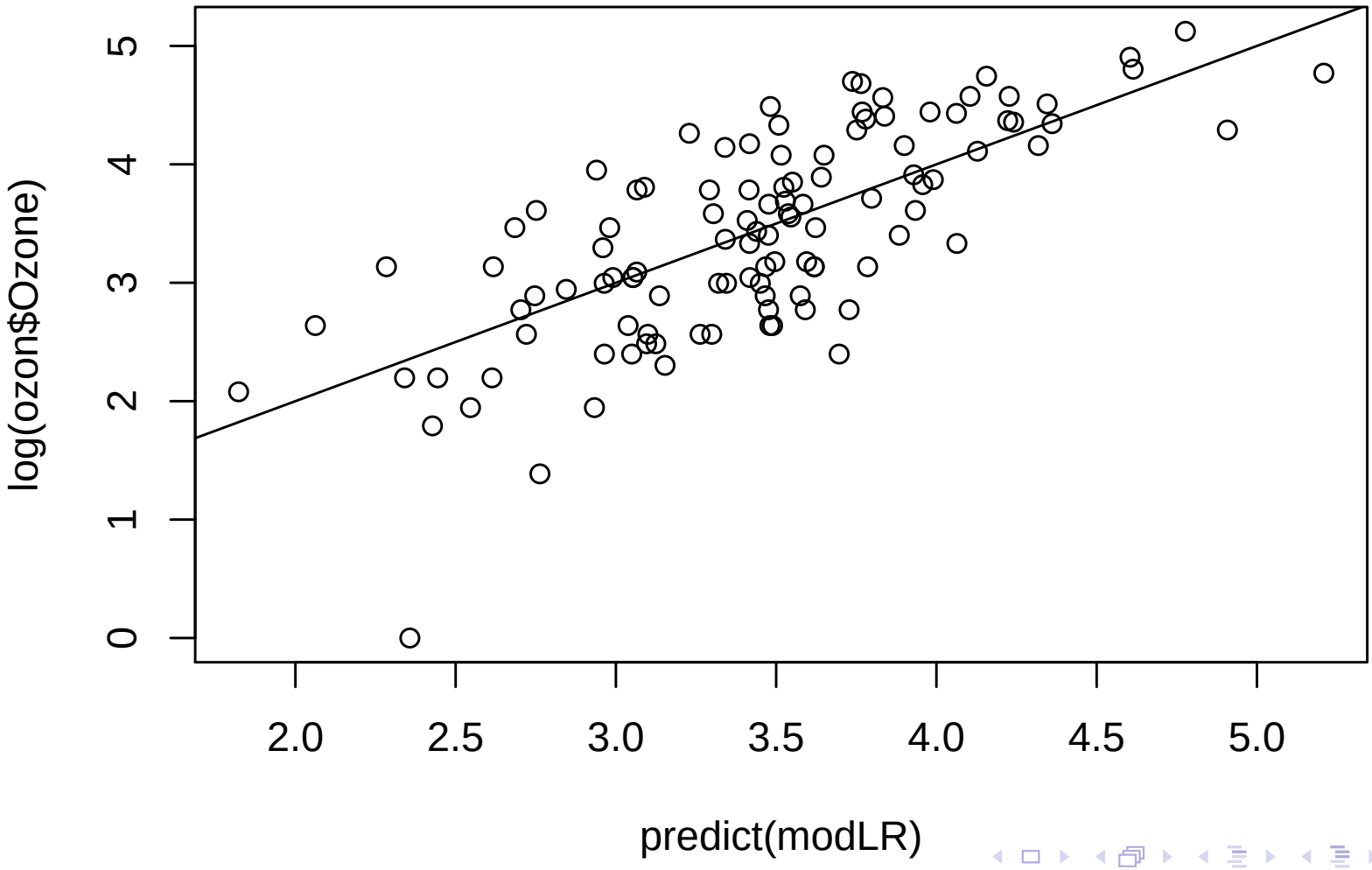
Effekt der Robustheit

```
> plot(predict(modLR),predict(modL))
> abline(0,1)
```



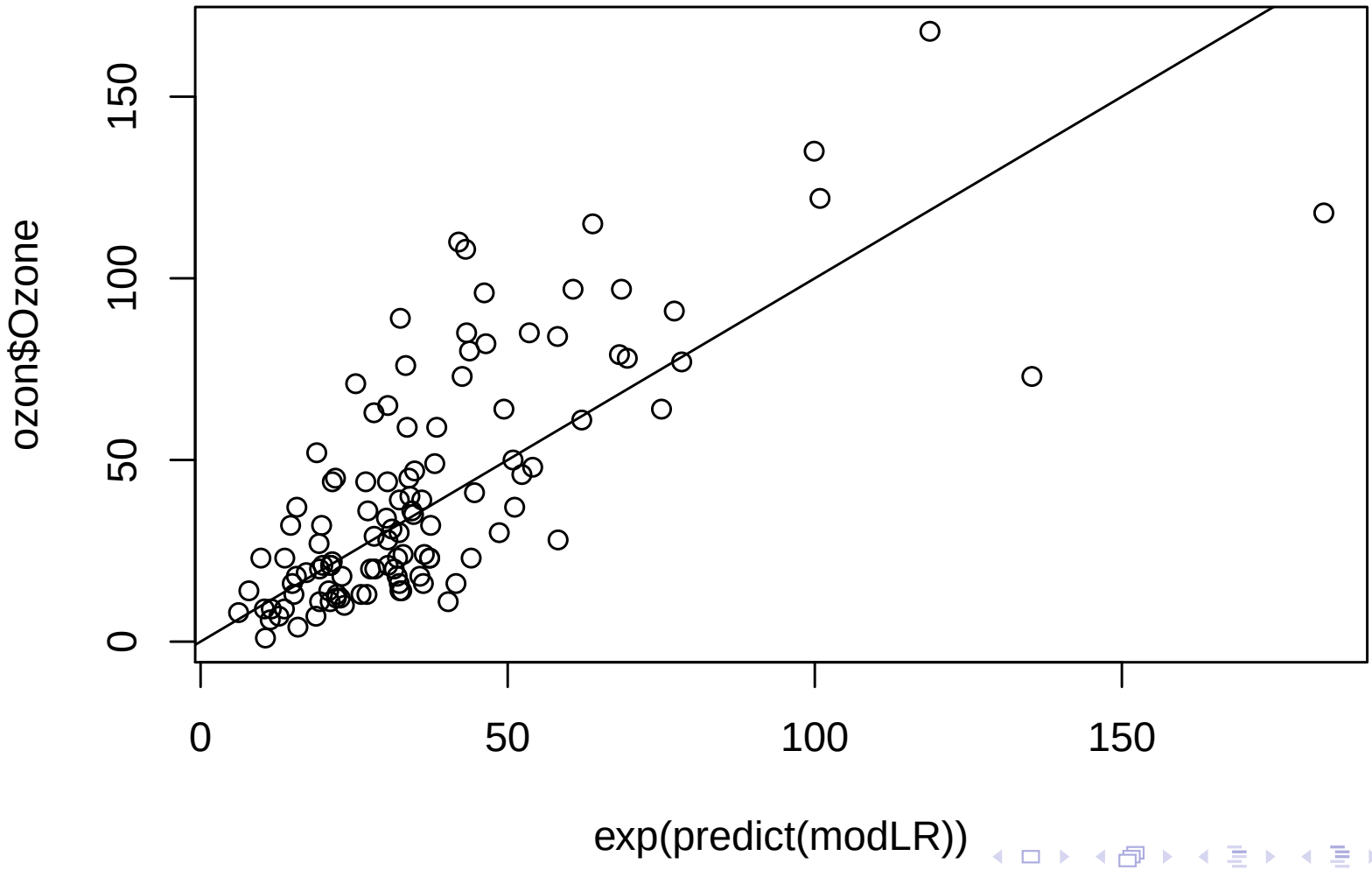
Qualität des Ergebnisses

```
> plot(predict(modLR),log(ozon$Ozone))
> abline(0,1)
```



Qualität des Vorhersage

```
> plot(exp(predict(modLR)),ozon$Ozone)
> abline(0,1)
```



Vergleich der Erklärungskraft

```
> R2(mod)
[1] 0.4495
> R2(modL)
[1] 0.5458
> R2(modLR)
[1] 0.5375
```

Ergebnisse

- Unser bevorzugtes Modell:

  $$\ln(\text{“}\texttt{Ozon}\text{”}_i) = 4.24 - 1.16 \cdot \ln(\text{“}\texttt{Wind}\text{”}_i) + 0.36 \cdot \ln(\text{“}\texttt{Solar.R}\text{”}_i) + \epsilon_i$$

  $\epsilon_i \sim N(0, 0.6061698)$.
  Robust geschätzt, da ein Ausreißer vorhanden.
- $R^2 = 0.537$
- Unser Modell erklärt die Hälfte der (geometrischen) Ozonvariabilität.
- Wind reduziert Ozonbelastung.
- Sonneneinstrahlung erhöht Ozonbelastung.
- Allerdings sind die Unterschiede zum additiven Modell minimal!

Das Log-Modell

- Unser bevorzugtes Modell:

$$\ln(\text{“}\texttt{Ozon}\text{”}_i) = 4.24 - 1.16 \cdot \ln(\text{“}\texttt{Wind}\text{”}_i) + 0.36 \cdot \ln(\text{“}\texttt{Solar.R}\text{”}_i) + \epsilon_i$$

$$\epsilon_i \sim N(0, 0.6061698).$$

- e^x auf beide Seiten angewendet:

$$\text{“}\texttt{Ozon}\text{”}_i = e^{4.24} \cdot e^{-1.16 \cdot \ln(\text{“}\texttt{Wind}\text{”}_i)} \cdot e^{0.36 \cdot \ln(\text{“}\texttt{Solar.R}\text{”}_i)} e_i^{\epsilon}$$

$$\epsilon_i \sim N(0, 0.6061698).$$

- und als multiplikatives Modell umformuliert:

$$\text{“}\texttt{Ozon}\text{”}_i = 69.7 \cdot \text{“}\texttt{Wind}\text{”}_i^{-1.16} \cdot \text{“}\texttt{Solar.R}\text{”}_i^{0.36} \cdot \epsilon_i$$

$$\epsilon_i \sim LogN(0, 0.6061698). \text{ (Lognormalverteilung)}$$

Zusammenfassung: Multiple Regression

Fast Alles geht genauso, wie bei der einfachen linearen Regression

- Schätzung durch minimale Quadrate
- Test in Varianzanalysetabelle
- Bewertung der Wichtigkeit durch R^2
- Diagnostische Methoden: Residuen, Hebelwirkung, Cook-Distanzen
- Robuste Schätzung
- Nicht: Einfache Visualisierung des Modells

Konzept: Interaktion

- Möglicherweise wirkt die Sonneneinstrahlung ja bei verschiedenen Windverhältnissen verschieden.

Konzept: Interaktion

- Möglicherweise wirkt die Sonneneinstrahlung ja bei verschiedenen Windverhältnissen verschieden.
- Modell z.B.

$$\ln(\text{“}\texttt{Ozone}\text{”}) = a + b \cdot \ln(\text{“}\texttt{Wind}\text{”}) + (c + d \cdot \ln(\text{“}\texttt{Wind}\text{”})) \cdot \ln(\text{“}\texttt{Solar.R}\text{”}) + \epsilon$$

Konzept: Interaktion

- Möglicherweise wirkt die Sonneneinstrahlung ja bei verschiedenen Windverhältnissen verschieden.
- Modell z.B.

$$\ln(\text{“}\texttt{Ozone}\text{”}) = a + b \cdot \ln(\text{“}\texttt{Wind}\text{”}) + (c + d \cdot \ln(\text{“}\texttt{Wind}\text{”})) \cdot \ln(\text{“}\texttt{Solar.R}\text{”}) + \epsilon$$

- Ausmultiplizieren:

$$\ln(\text{“}\texttt{Ozone}\text{”}) = a + b \cdot \ln(\text{“}\texttt{Wind}\text{”}) + c \cdot \ln(\text{“}\texttt{Solar.R}\text{”}) + d \cdot \underbrace{\ln(\text{“}\texttt{Wind}\text{”}) \cdot \ln(\text{“}\texttt{Solar.R}\text{”})}_{\text{Interaktion}} + \epsilon$$

Konzept: Interaktion

- Möglicherweise wirkt die Sonneneinstrahlung ja bei verschiedenen Windverhältnissen verschieden.
- Modell z.B.

$$\ln(\text{“}\texttt{Ozone}\text{”}) = a + b \cdot \ln(\text{“}\texttt{Wind}\text{”}) + (c + d \cdot \ln(\text{“}\texttt{Wind}\text{”})) \cdot \ln(\text{“}\texttt{Solar.R}\text{”}) + \epsilon$$

- Ausmultiplizieren:

$$\ln(\text{“}\texttt{Ozone}\text{”}) = a + b \cdot \ln(\text{“}\texttt{Wind}\text{”}) + c \cdot \ln(\text{“}\texttt{Solar.R}\text{”}) + d \cdot \underbrace{\ln(\text{“}\texttt{Wind}\text{”}) \cdot \ln(\text{“}\texttt{Solar.R}\text{”})}_{\text{Interaktion}} + \epsilon$$

-

$$\ln(\text{“}\texttt{Ozone}\text{”}) = a + (b + d \cdot \ln(\text{“}\texttt{Solar.R}\text{”})) \cdot \ln(\text{“}\texttt{Wind}\text{”}) + c \cdot \ln(\text{“}\texttt{Solar.R}\text{”}) + \epsilon$$

Interaktion im Computer angeben

```
> modLI <- lm(log(Ozone)~log(Wind)+log(Solar.R)+log(Wind)*l
> modLI

Call:
lm(formula = log(Ozone) ~ log(Wind) + log(Solar.R) + log(Wi
    log(Solar.R), data = ozon)

Coefficients:
          (Intercept)                log(Wind)
                1.365                   -0.138
         log(Solar.R)  log(Wind):log(Solar.R)
                0.900                   -0.192
```

. . . und Abkürzen

```
> modLI <- lm(log(Ozone)~log(Wind)*log(Solar.R),data=ozon)
> modLI

Call:
lm(formula = log(Ozone) ~ log(Wind) * log(Solar.R), data =

Coefficients:
          (Intercept)                log(Wind)
                1.365                   -0.138
         log(Solar.R)  log(Wind):log(Solar.R)
                0.900                   -0.192
```

R^2 vergleichen

```
> R2(mod)
[1] 0.4495
> R2(modL)
[1] 0.5458
> R2(modLI)
[1] 0.5495
```

Mit mehr Parametern steigt R^2 grundsätzlich an!

Varianzanalysetabelle

```
> anova(modLI)

Analysis of Variance Table

Response: log(Ozone)
                          Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
log(Wind)                  1   29.0   28.97   83.43 4.6e-15
log(Solar.R)               1   16.0   16.04   46.19 6.3e-10
log(Wind):log(Solar.R)     1    0.3    0.31    0.88    0.35
Residuals                107   37.2    0.35
```

Ergebnis

- **Ergebnis:** Eine Interaktion konnte nicht nachgewiesen werden.

Ergebnis

- **Ergebnis:** Eine Interaktion konnte nicht nachgewiesen werden.
- Es gibt keinen Hinweis in den Daten, dass der Einfluß des Windes von der Sonneneinstrahlung abhängt.

Ergebnis

- **Ergebnis:** Eine Interaktion konnte nicht nachgewiesen werden.
- Es gibt keinen Hinweis in den Daten, dass der Einfluß des Windes von der Sonneneinstrahlung abhängt.
- Es gibt keinen Hinweis in den Daten, dass der Einfluß der Sonneneinstrahlung vom Wind abhängt.

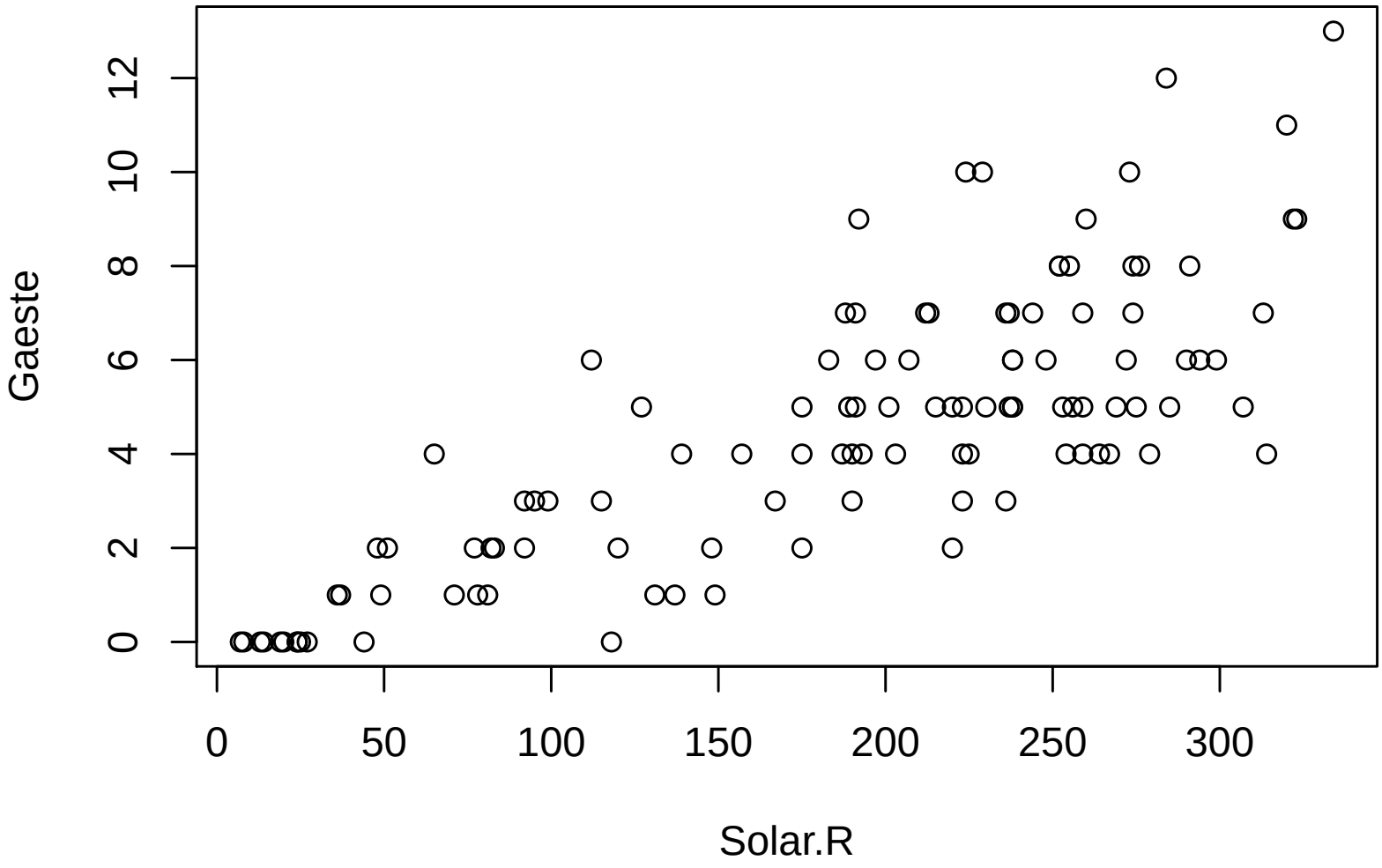
Problem: Scheinzusammenhang

Angenommen wir hätten auch noch die Anzahl der Badegäste im Strandhotel gezählt:

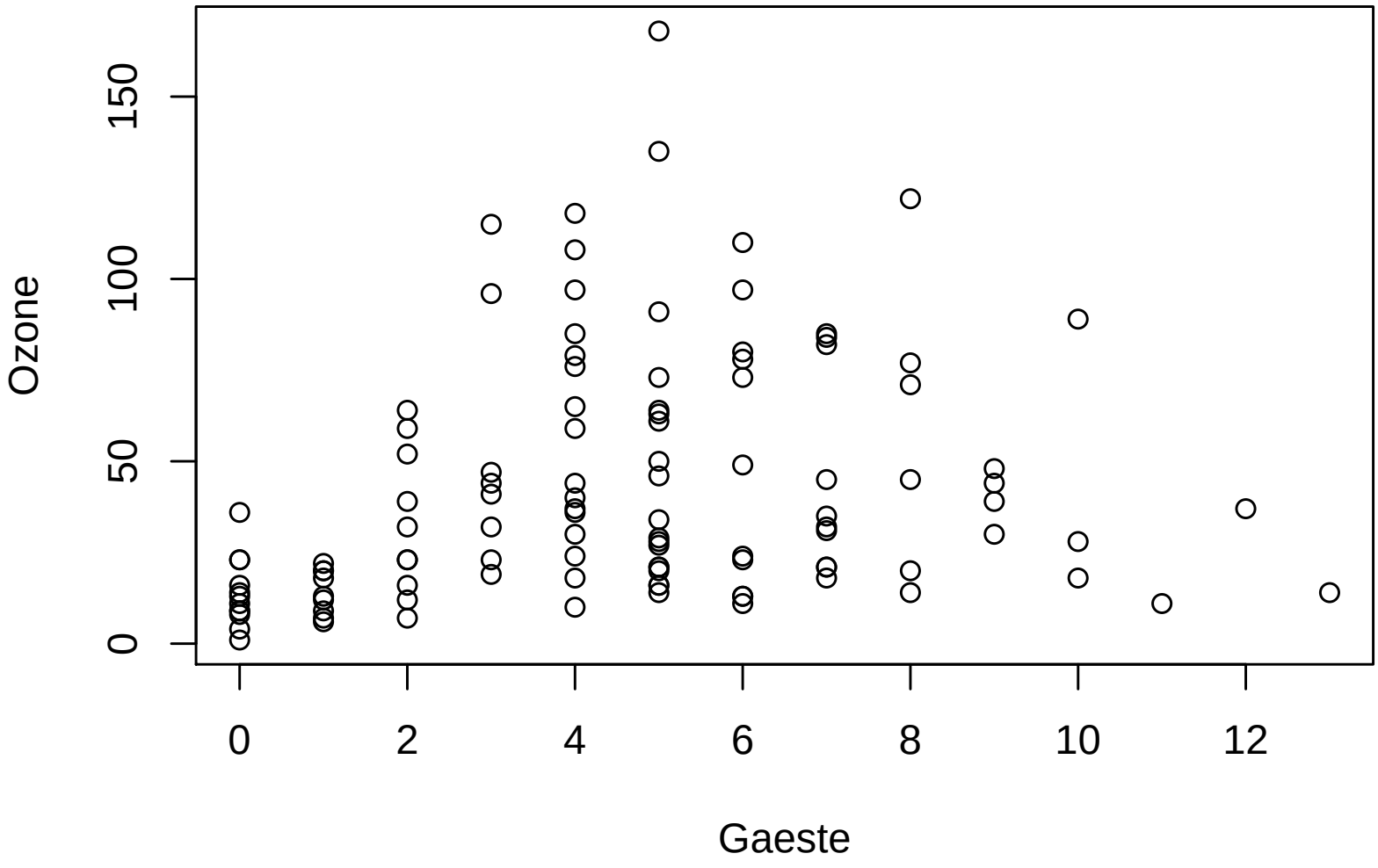
```
> ozon$Gaeste <- rpois(nrow(ozon),ozon$Solar.R/40)
> ozon$Gaeste
```

```
  [1]  3  0  1  7  6  3  0  5  6  8  4 13  5  1  9  0  0 11
 [19]  0  2  0  8  3  4  5  8  9  2  7 12  1  2  1  5  6  7
 [37]  2  4  8  4  6  4  4  5  2  9  7  5  4  5  0  6  4  1
 [55]  2  7  5  5  4  2  0  2  8 10  6  9 10  4  1  2  3  7
 [73]  4  7  1  7  5  5  4  4  7  7  3  6  6  5  3  3  8  2
 [91]  5  4  3  5  5  0  6  5 10  0  6  5  6  0  4  1  0  4
[109]  5  1  5
```

Sonne und Gaeste



Machen Badegäste Ozon?



Regression mit Gaesten

```
> modXX <- lm(Ozone~Gaeste,data=ozon)
> modXX

Call:
lm(formula = Ozone ~ Gaeste, data = ozon)

Coefficients:
(Intercept)       Gaeste
      29.78         2.75
```

Varianzanalysetabelle

```
> anova(modXX)

Analysis of Variance Table

Response: Ozone
           Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
Gaeste      1   7135    7135    6.78   0.01
Residuals 109 114667    1052
```

Überraschendes Ergebnis

- Es besteht ein Zusammenhang zwischen Ozon und Badegästen.

Überraschendes Ergebnis

- Es besteht ein Zusammenhang zwischen Ozon und Badegästen.
- Natürlich bewirken Badegäste kein Ozon.

Überraschendes Ergebnis

- Es besteht ein Zusammenhang zwischen Ozon und Badegästen.
- Natürlich bewirken Badegäste kein Ozon.
- Vielmehr bewirkt die Sonne, sowohl Ozon als auch Badegäste.

Überraschendes Ergebnis

- Es besteht ein Zusammenhang zwischen Ozon und Badegästen.
- Natürlich bewirken Badegäste kein Ozon.
- Vielmehr bewirkt die Sonne, sowohl Ozon als auch Badegäste.
- So ein Zusammenhang heißt, Assoziation, indirekter Zusammenhang oder auch Scheinzusammenhang.

Modell zusammen mit Sonneneinstrahlung

```
> modXX1<-lm(log(Ozone)~Gaeste+Solar.R,data=ozon)
> anova(modXX1)

Analysis of Variance Table

Response: log(Ozone)
           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
Gaeste      1    9.9    9.87    16.3 9.9e-05
Solar.R     1    7.3    7.34    12.2 0.00071
Residuals 108   65.3    0.60
```

Modell zusammen mit Sonneneinstrahlung

```
> modXX1<-lm(log(Ozone)~Gaeste+Solar.R,data=ozon)
> anova(modXX1)

Analysis of Variance Table

Response: log(Ozone)
           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
Gaeste      1    9.9    9.87    16.3 9.9e-05
Solar.R     1    7.3    7.34    12.2 0.00071
Residuals 108   65.3    0.60
```

Die Anova-Tests

Diese ANOVA Tabelle enthält zwei Tests:

	$H_0 : Y_i = a + \epsilon_i$
Test Gaeste	*vs.*
	$H_1 : Y_i = a + b \cdot \text{“}\texttt{Gaeste}\text{”}_i + \epsilon_i$
Test Solar.R	*vs.*
	$H_2 : Y_i = a + b \cdot \text{“}\texttt{Gaeste}\text{”} +_i + c \cdot \text{“}\texttt{Solar.R}\text{”}_i + \epsilon_i$

In jeder Zeile der Tabelle wird ein Test durchgeführt.

Welcher Nachweis fehlt?

Wir haben bewiesen:

- Ozon nicht konstant ist, sondern irgendwie bei mehr Gaesten mehr wird.
- Ozon nicht nur von Gaeste abhängt, sondern auch von der Einstrahlung.
- Wir haben nicht überprüft, ob eine Abhängigkeit von den Gästen auch dann besteht, wenn die Sonneneinstrahlung als Einfluß bekannt ist.

Modell in umgekehrter Reihenfolge

```
> modXX1a<-lm(log(Ozone)~Solar.R+Gaeste,data=ozon)
> anova(modXX1a)

Analysis of Variance Table

Response: log(Ozone)
           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
Solar.R     1   17.2   17.16   28.39 5.5e-07
Gaeste      1    0.1    0.06    0.09    0.76
Residuals 108   65.3    0.60
```

Die Gaeste können also nichts erklären, was nicht bereits durch die Sonneeinstrahlung erklärt ist.

Verdacht

- Vielleicht ist das ja auch mit dem Wind so.
- Chemisch gesehen entsteht Ozon bei Sonneneinstrahlung.
- Viel Wind geht einher mit wenig Einstrahlung.
- Wind kann Ozon doch weder produzieren noch vernichten, oder?
- Vielleicht haben wir hier auch einen Scheinzusammenhang.

Wir hatten,. . .

```
> anova(lm(log(Ozone)~log(Wind)+log(Solar.R),data=ozon))

Analysis of Variance Table

Response: log(Ozone)
              Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
log(Wind)      1   29.0   28.97    83.5 4.2e-15
log(Solar.R)   1   16.0   16.04    46.2 6.0e-10
Residuals    108   37.5    0.35
```

. . . und wechseln die Reihenfolge

```
> anova(lm(log(Ozone)~log(Solar.R)+log(Wind),data=ozon))
Analysis of Variance Table

Response: log(Ozone)
               Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
log(Solar.R)    1   23.9   23.90    68.9 3.2e-13
log(Wind)       1   21.1   21.11    60.9 4.1e-12
Residuals     108   37.5    0.35
```

Ergebnis

- Die Sonneneinstrahlung erklärt den Einfluss des Windes nicht.

Ergebnis

- Die Sonneneinstrahlung erklärt den Einfluss des Windes nicht.
- **Regel:** Um offensichtliche Scheinzusammenhänge auszuschließen, die sich durch bekannte Einflußfaktorenerklären lassen, sollte zur Kontrolle immer nochmal eine Modell überprüft werden, in dem der Einfluss zuletzt steht.

Ergebnis

- Die Sonneneinstrahlung erklärt den Einfluss des Windes nicht.
- **Regel:** Um offensichtliche Scheinzusammenhänge auszuschließen, die sich durch bekannte Einflußfaktorenerklären lassen, sollte zur Kontrolle immer nochmal eine Modell überprüft werden, in dem der Einfluss zuletzt steht.
- **Regel:** Bei Beobachtungen ist durch den statistischen Nachweis eines Einflusses noch kein **kausaler** Zusammenhang nachgewiesen.

Die Varianzanalyse kenne wir als:
Mehrstichprobentest, auf Gleichheit der Mittelwerte, bei Normalverteilung.

Wiederholung Varianzanalyse

Unser Blick auf die **Varianzanalyse** war:
Wir haben mehrere normalverteilte Stichproben mit gleicher Varianz:

$$
\begin{aligned}
&X_i,\ i = 1, \ldots, n_X, \quad && X_i \sim N(\mu_X, \sigma^2) \\
&Y_i,\ i = 1, \ldots, n_Y, \quad && Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma^2) \\
&\vdots \\
&Z_i,\ i = 1, \ldots, n_Y, \quad && Z_i \sim N(\mu_Z, \sigma^2)
\end{aligned}
$$

Die Varianzanalyse testet ob alle Mittelwerte gleich sind:

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y = \ldots = \mu_Z$$

vs.

H_1 : ganz oder teilweise verschieden

Stichprobe als Kategorie

Ein anderer Blick auf die **Varianzanalyse** ist:

- Wir haben eine reelle Variable Y_i
- und eine kategorielle Variable $X_i \in \{1, \ldots, p\}$,
  die sagt aus welcher Gruppe/Stichprobe das statistische Individum i kommt

Wir verwenden dann die Bezeichnung:

$$\mu_k = \text{Mittelwert der Grundgesamtheit } k$$

Varianzanalyse als lineares Modell

Unsere Voraussetzung war dann,

$$Y_i \sim N(\mu_{X_i}, \sigma^2)$$

was man aber mit $\epsilon_i = Y_i - \mu_{X_i}$ schreiben kann als:

$$Y_i = a + \mu_{X_i} + \epsilon_i, \text{ mit } \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

und (mit $a = 0$) das ist:

$$Y_i = a + \mu_1 f_1(X_i) + \mu_2 f_2(X_i) + \ldots + \epsilon_i$$

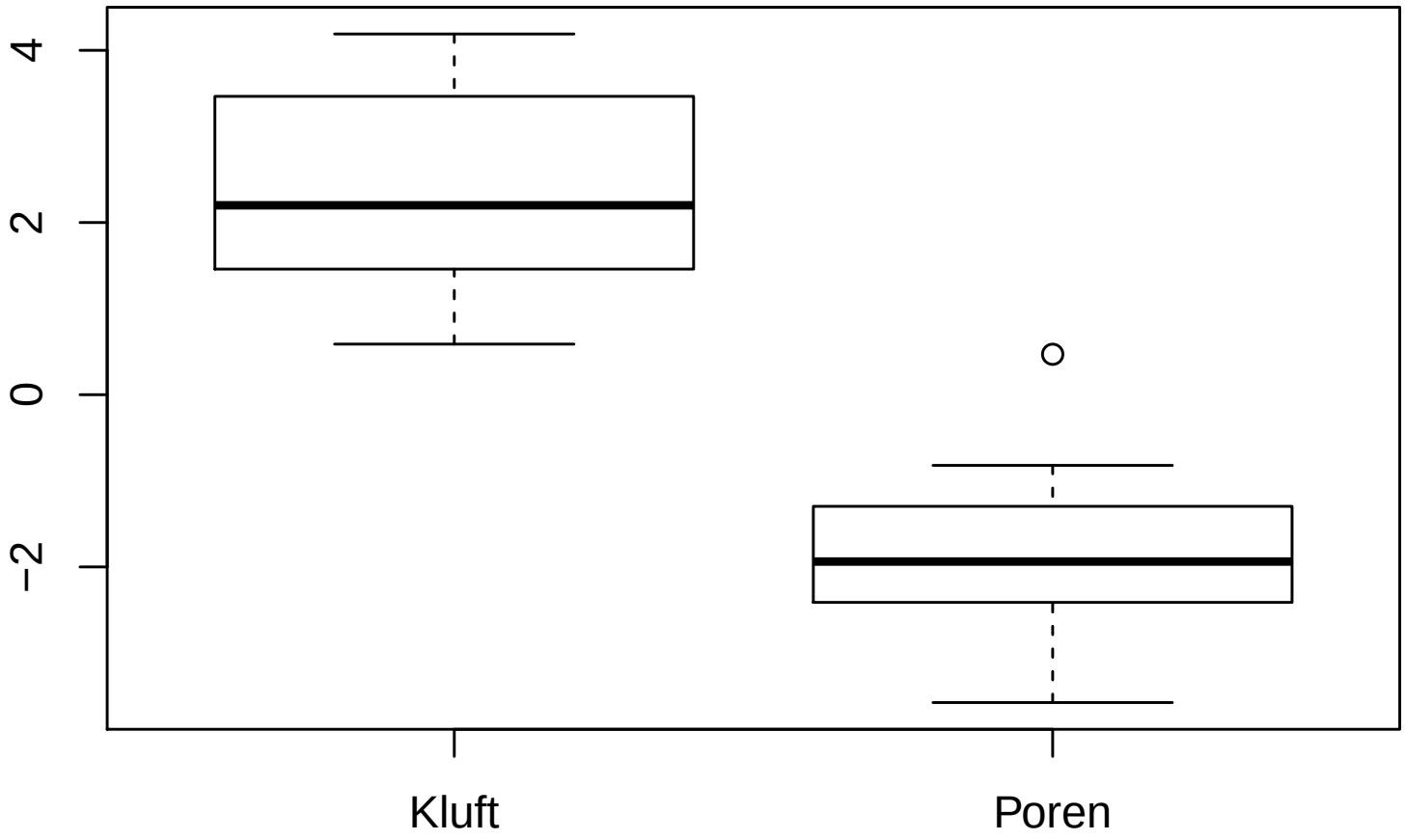
mit $f_k(X) = 1$ falls $X = k$ und 0 sonst.

Beispiel: Aquifer

```
> Aqui <- read.table("Aquifers.txt")
> Aqui$trans <- exp(Aqui$logT)
> Aqui
```

```
      logT Teufe  Type  trans
1  -3.5756 78.64 Poren  0.028
2  -2.6173 49.00 Poren  0.073
3  -2.2073 47.00 Poren  0.110
4  -1.9379 43.67 Poren  0.144
5  -1.7720 37.00 Poren  0.170
6  -0.8210 23.50 Poren  0.440
7   0.4700  9.00 Poren  1.600
8   0.5878 80.50 Kluft  1.800
9   1.4586 21.25 Kluft  4.300
10  1.8197 43.50 Kluft  6.170
11  2.5802 29.50 Kluft 13.200
12  3.4657 16.50 Kluft 32.000
13  4.1897 11.00 Kluft 66.000
```

Daten ansehen



Hilfsfunktionen

```
> Hebelwirkung <- function(Modell) {lm.influence(Modell)$hat}
> Auswertung <- function(Formel,Daten,Name,robust=FALSE) {
+   Daten <<- Daten
+   if( robust )
+     Modell <- lmRob(formula=Formel,data=Daten)
+   else
+     Modell <- lm(formula=Formel,data=Daten)
+   cat("R^2=",R2(Modell),"\n")
+   print(anova(Modell))
+   cat("Estimated Parameters of the model:\n")
+   print(coef(Modell))
+   if(robust) par(mfrow=c(2,2)) else par(mfrow=c(2,3))
+   plot(Modell$fitted.values,resid(Modell),xlab="Vorhersagen",ylab="Residuen")
+   title(Name,paste("R^2=",R2(Modell)))
+   fr <- model.frame(Formel,Daten)
+   if( is.factor(fr[[2]])) {
+     plot(fr[[2]],fr[[1]],xlab=names(fr)[2],ylab=names(fr)[1],pch=20)
+     points(fr[[2]],predict(Modell),pch=20,col="red")
+   } else {
+     plot(fr[[2]],fr[[1]],xlab=names(fr)[2],ylab=names(fr)[1],pch=20)
+     points(fr[[2]],predict(Modell),pch=20,col="red")
+     segments(fr[[2]],predict(Modell),fr[[2]],fr[[1]],col="yellow")
+   }
+   qqnorm(resid(Modell),ylab="Sample Quantiles of residuals")
+   qqline(resid(Modell))
+   title("",Name)
```

Varianzanalyse des Gesteinseinfluss

```
R^2= 0.7439
Analysis of Variance Table

Response: logT
           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
Type        1   55.1    55.1    31.9 0.00015
Residuals 11   19.0     1.7
Estimated Parameters of the model:
(Intercept)   TypePoren
       2.35       -4.13
```

Beobachtungen zur Varianzanalyse

- Der Computer hat den Type implizit als kategoriell erkannt und statt einer Regressionsanalyse eine Varianzanalyse gerechnet.

Beobachtungen zur Varianzanalyse

- Der Computer hat den Type implizit als kategoriell erkannt und statt einer Regressionsanalyse eine Varianzanalyse gerechnet.
- Es fehlt der Parameter "`TypeKluft`":

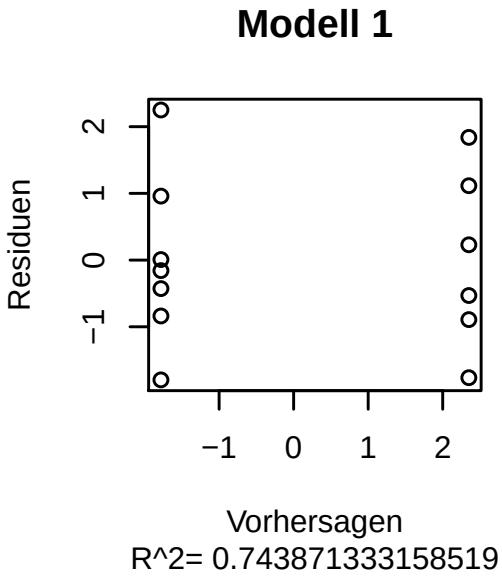
Beobachtungen zur Varianzanalyse

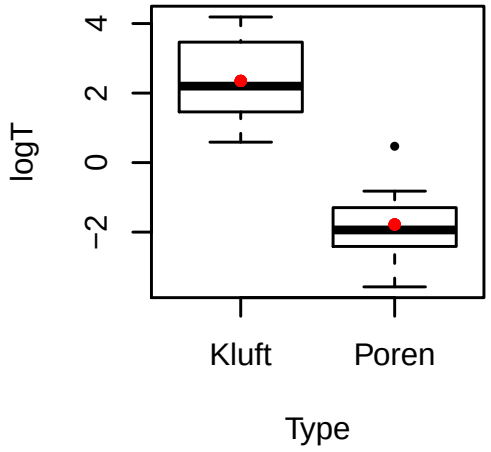
- Der Computer hat den Type implizit als kategoriell erkannt und statt einer Regressionsanalyse eine Varianzanalyse gerechnet.
- Es fehlt der Parameter "`TypeKluft`":
- Der Computer entfernt implizit den Einfluss der letzten Kategorie aus dem Modell:

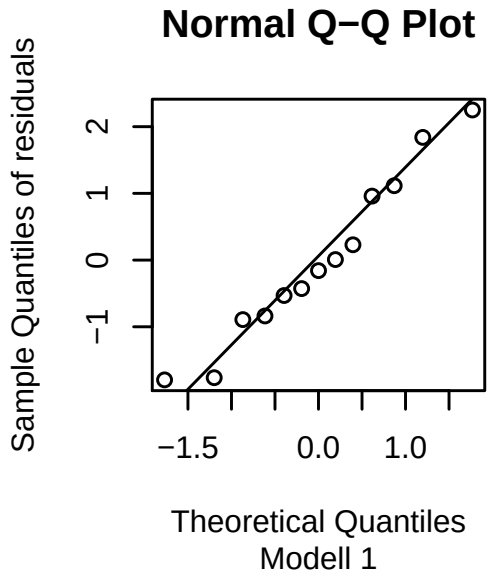
$$\text{“logT”} = a + bf_1(\text{“Type”}) + \epsilon$$

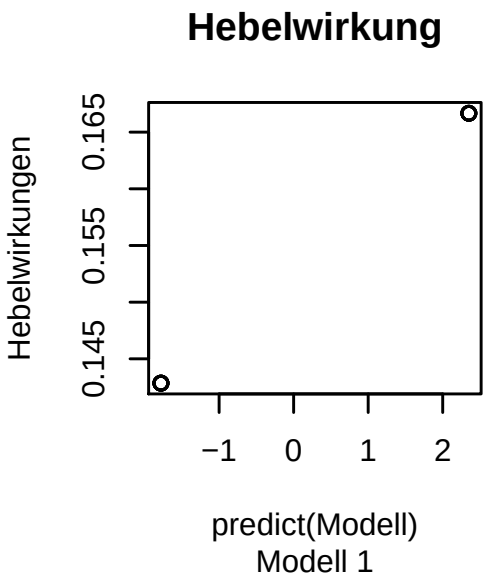
Also: $\mu_{\text{Poren}} = a + b = 1.78$ und $\mu_{\text{Kluft}} = a + 0 = 2.35$

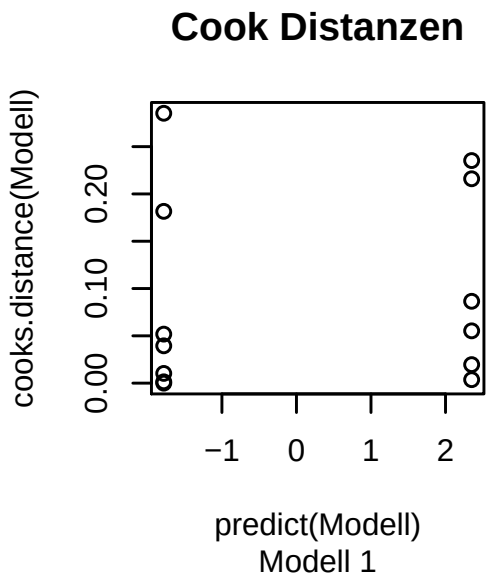
Diagnostik

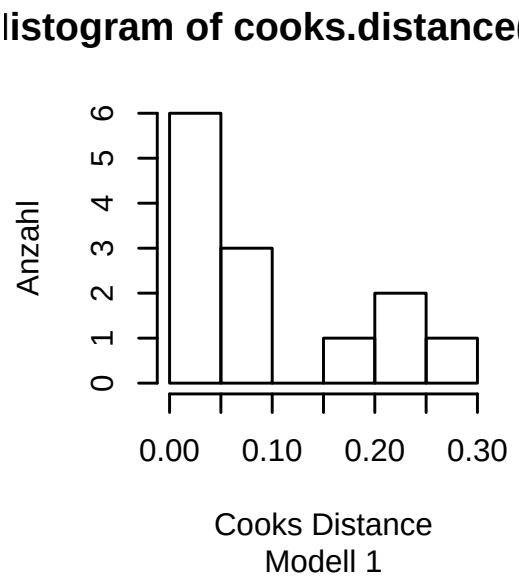

Modell 1
Residuen
−1
0
1
2
Vorhersagen
R^2= 0.743871333158519


logT
−2
0
2
4
Kluft
Poren
Type


Normal Q−Q Plot
Sample Quantiles of residuals
−1
0
1
2
−1.5
0.0
1.0
Theoretical Quantiles
Modell 1


Hebelwirkung
Hebelwirkungen
0.145
0.155
0.165
−1
0
1
2
predict(Modell)
Modell 1


Cook Distanzen
cooks.distance(Modell)
0.00
0.10
0.20
−1
0
1
2
predict(Modell)
Modell 1


listogram of cooks.distance(M
Anzahl
0
1
2
3
4
5
6
0.00
0.10
0.20
0.30
Cooks Distance
Modell 1

Regression des Teufeneinfluss

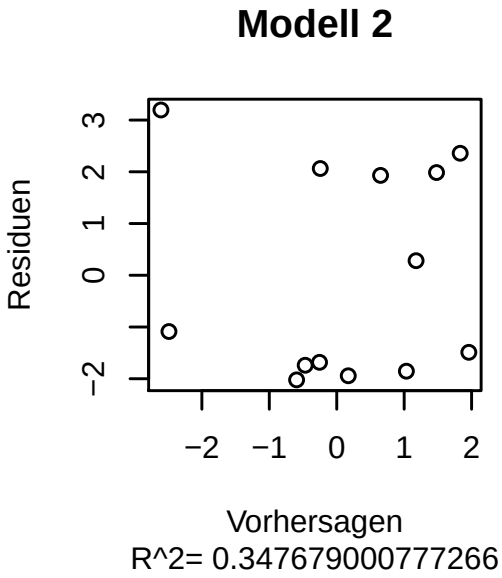
```
R^2= 0.3477
Analysis of Variance Table

Response: logT
          Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
Teufe      1   25.8   25.76    5.86  0.034
Residuals 11   48.3    4.39
Estimated Parameters of the model:
(Intercept)       Teufe
    2.53348    -0.06386
```

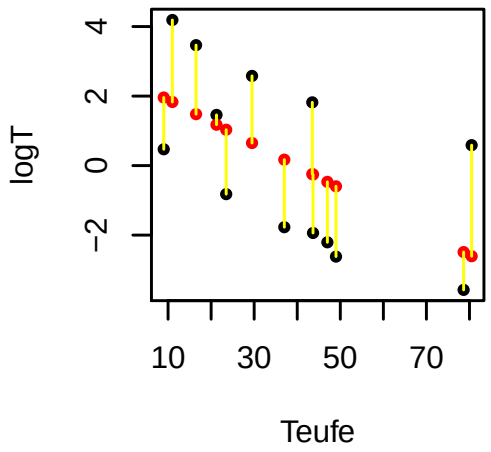
Modell

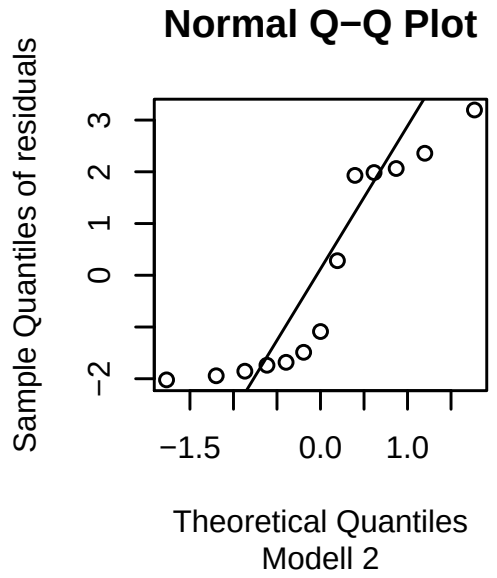
`logT~Teufe`

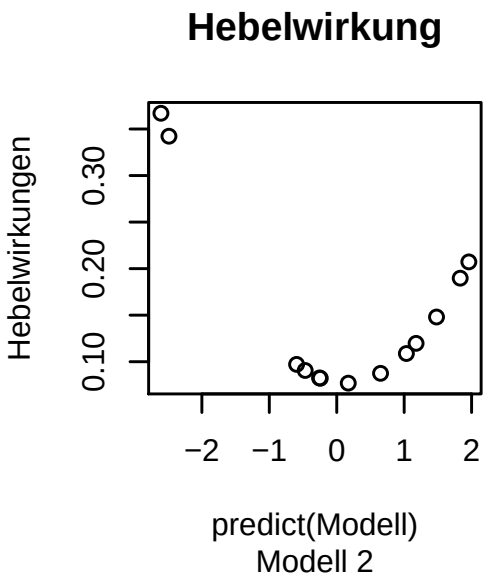
$$\text{“}\texttt{logT}\text{”} = a + b \cdot \text{“}\texttt{Teufe}\text{”}_i + \epsilon_i$$

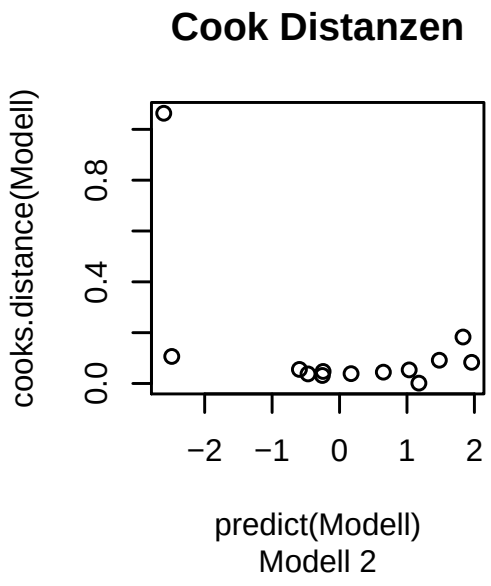
Diagnostik

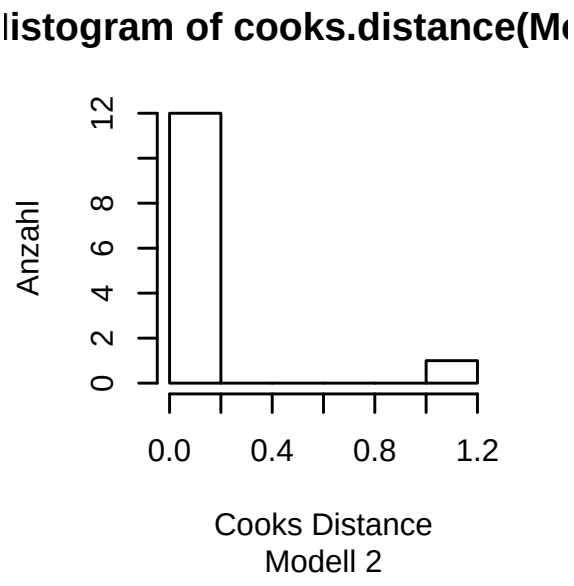

Modell 2
Residuen
Vorhersagen
R^2= 0.347679000777266


logT
Teufe


Normal Q−Q Plot
Sample Quantiles of residuals
Theoretical Quantiles
Modell 2


Hebelwirkung
Hebelwirkungen
predict(Modell)
Modell 2


Cook Distanzen
cooks.distance(Modell)
predict(Modell)
Modell 2


listogram of cooks.distance(M
Anzahl
Cooks Distance
Modell 2

Kombinierter Einfluss

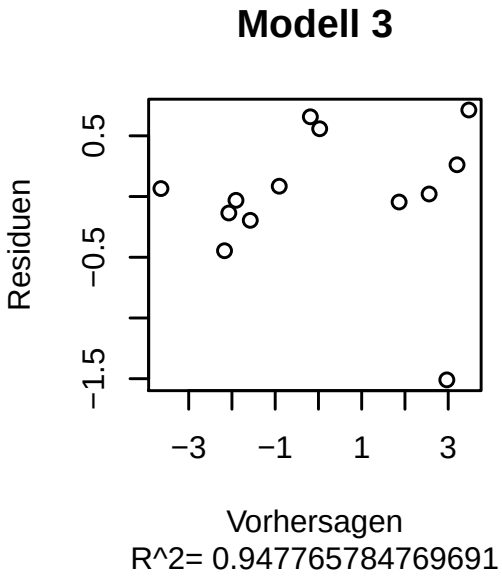
Wir können beide Einflüsse in das Modell aufnehmen:
`logT~Teufe+Type`

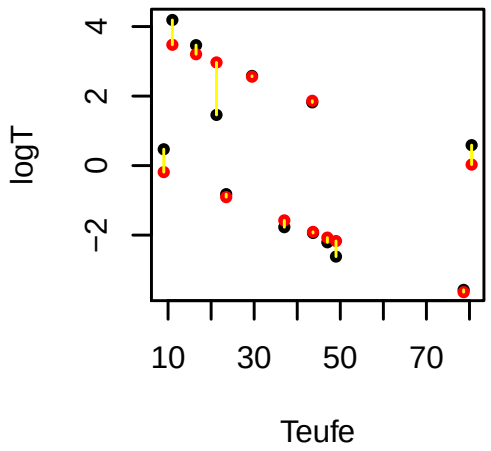
$$\text{“}\texttt{logT}\text{”} = a + b \cdot \text{“}\texttt{Teufe}\text{”}_i + c \cdot f_1(\text{“}\texttt{Type}\text{”}) + d \cdot f_2(\text{“}\texttt{Type}\text{”}) + \epsilon_i$$

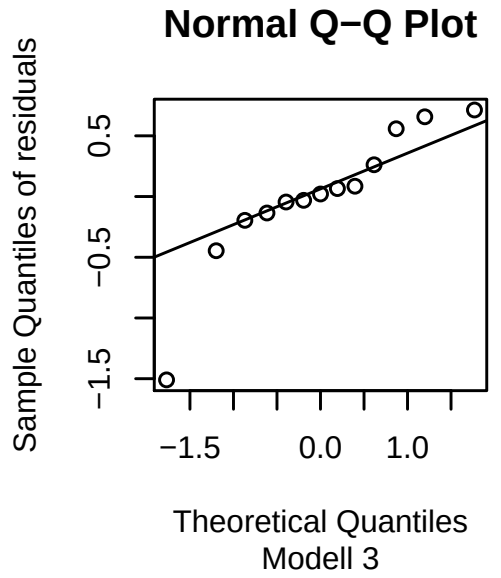
Lineares Modell für logT

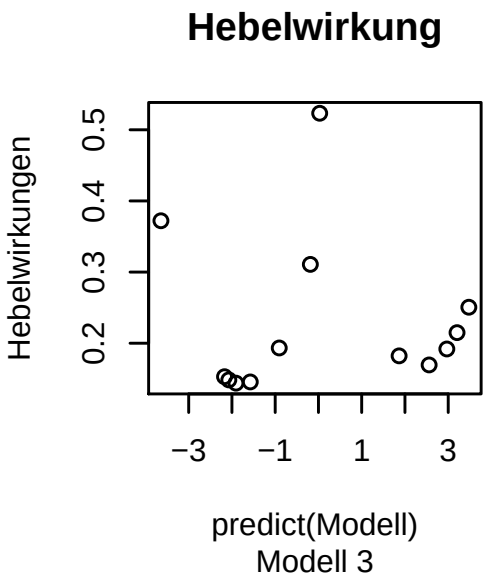
```
R^2= 0.9478
Analysis of Variance Table

Response: logT
           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
Teufe       1   25.8    25.8    66.6 9.9e-06
Type        1   44.5    44.5   114.9 8.4e-07
Residuals 10    3.9     0.4
Estimated Parameters of the model:
(Intercept)       Teufe   TypePoren
     4.0223     -0.0496     -3.7630
```

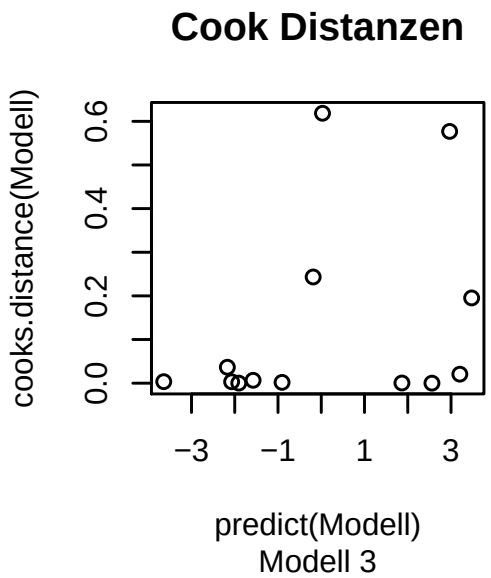
Diagnostik

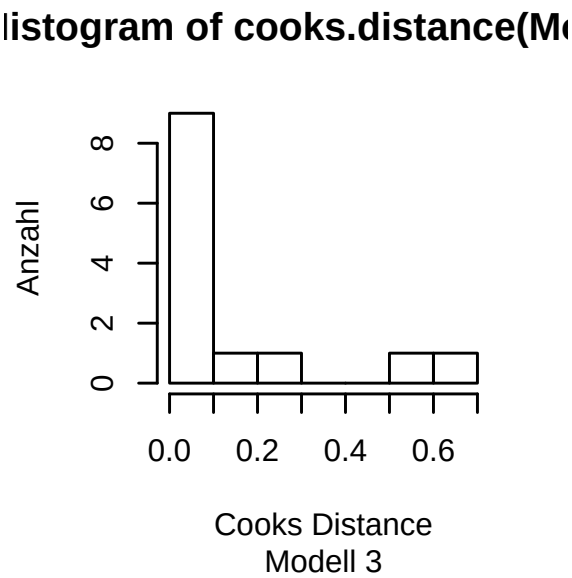

Modell 3
Residuen
0.5
−0.5
−1.5
−3
−1
1
3
Vorhersagen
R^2= 0.947765784769691


logT
4
2
0
−2
10
30
50
70
Teufe


Normal Q−Q Plot
Sample Quantiles of residuals
0.5
−0.5
−1.5
−1.5
0.0
1.0
Theoretical Quantiles
Modell 3


Hebelwirkung
Hebelwirkungen
0.5
0.4
0.3
0.2
−3
−1
1
3
predict(Modell)
Modell 3

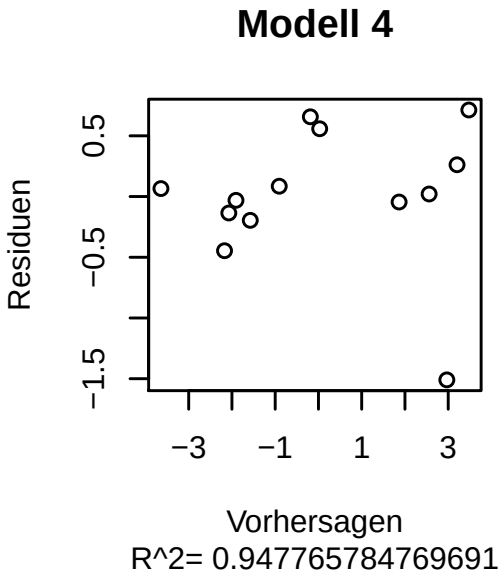

Cook Distanzen
cooks.distance(Modell)
0.6
0.4
0.2
0.0
−3
−1
1
3
predict(Modell)
Modell 3

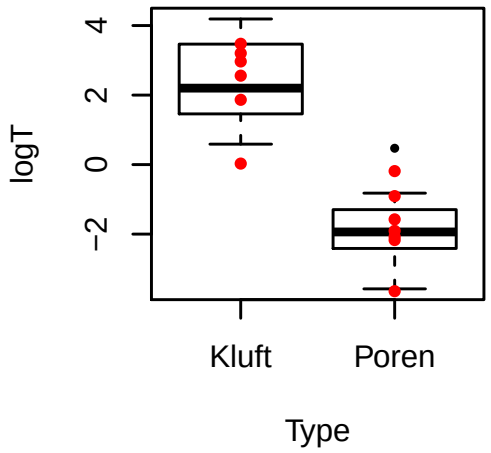

listogram of cooks.distance(M
Anzahl
8
6
4
2
0
0.0
0.2
0.4
0.6
Cooks Distance
Modell 3

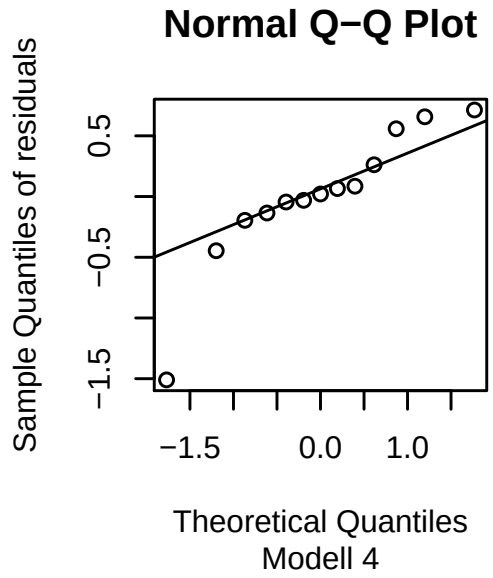
. . . und in umgekehrter Reihenfolge

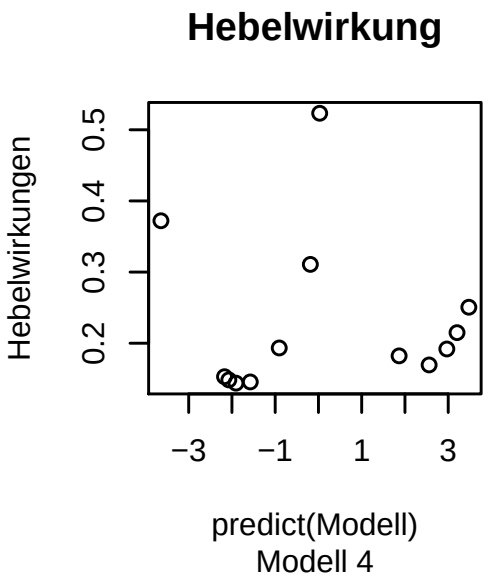
```
> Auswertung(logT~Type+Teufe,Aqui,"Modell 4")

R^2= 0.9478
Analysis of Variance Table

Response: logT
          Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
Type       1   55.1    55.1     142 3.1e-07
Teufe      1   15.1    15.1      39 9.5e-05
Residuals 10    3.9     0.4
Estimated Parameters of the model:
(Intercept)   TypePoren       Teufe
     4.0223     -3.7630     -0.0496
```

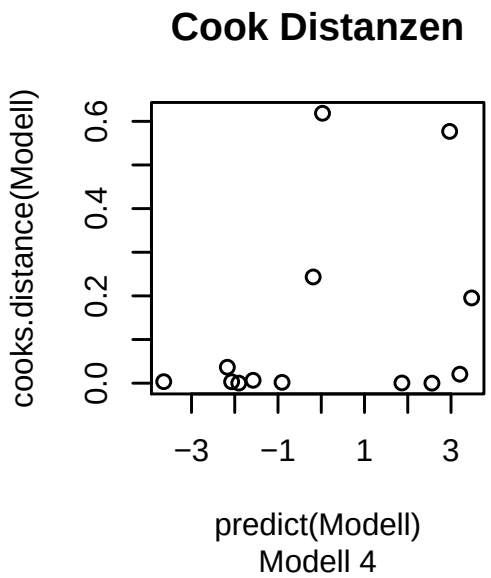
Diagnostik

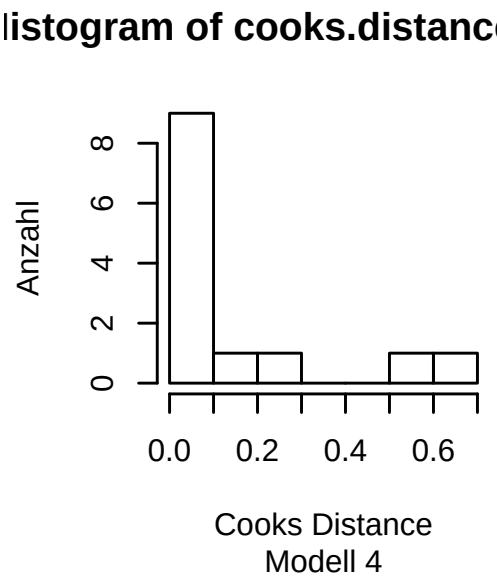

Modell 4
Residuen
0.5
−0.5
−1.5
−3
−1
1
3
Vorhersagen
R^2= 0.947765784769691


logT
4
2
0
−2
Kluft
Poren
Type


Normal Q−Q Plot
Sample Quantiles of residuals
0.5
−0.5
−1.5
−1.5
0.0
1.0
Theoretical Quantiles
Modell 4


Hebelwirkung
Hebelwirkungen
0.5
0.4
0.3
0.2
−3
−1
1
3
predict(Modell)
Modell 4


Cook Distanzen
cooks.distance(Modell)
0.6
0.4
0.2
0.0
−3
−1
1
3
predict(Modell)
Modell 4


listogram of cooks.distance(M
Anzahl
8
6
4
2
0
0.0
0.2
0.4
0.6
Cooks Distance
Modell 4

Ergebnis

- Die Leitfähigkeit des Aquifers hängt sowohl von der Teufe und als auch vom Gesteinstyp ab.
- Die Leitfähigkeit ist dadurch fast vollständig erklärt.
-

Diskret-Stetig Interaktion

Frage: Ist der Teufeneinfluss vielleicht unterschiedlich zwischen den Gesteinstypen?
Wir fügen eine Interaktion zum Modell hinzu:

$$\text{“}\texttt{logT}\text{”} = \ldots + e \cdot \text{“}\texttt{Teufe}\text{”} \cdot f_1(\text{“}\texttt{Type}\text{”}) + f \cdot \text{“}\texttt{Teufe}\text{”} \cdot f_2(\text{“}\texttt{Type}\text{”}) + \epsilon$$

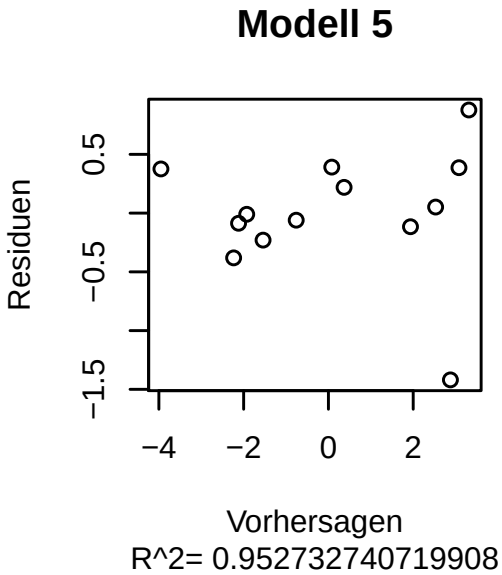
. . . und mit Interaktion

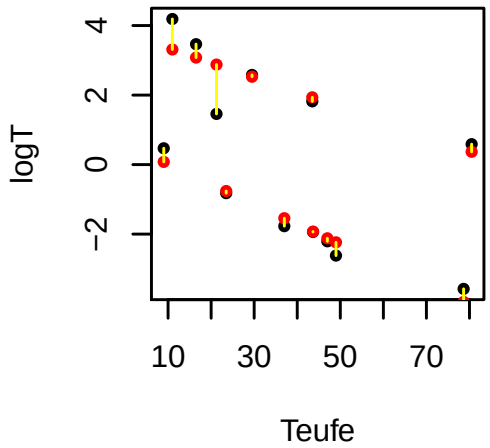
```
> Auswertung(logT~Teufe*Type,Aqui,"Modell 5")

R^2= 0.9527
Analysis of Variance Table

Response: logT
            Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
Teufe        1   25.8    25.8   66.20 1.9e-05
Type         1   44.5    44.5  114.26 2.0e-06
Teufe:Type   1    0.4     0.4    0.95    0.36
Residuals    9    3.5     0.4
Estimated Parameters of the model:
    (Intercept)           Teufe       TypePoren
        3.77785         -0.04235         -3.17872
Teufe:TypePoren
       -0.01552
```

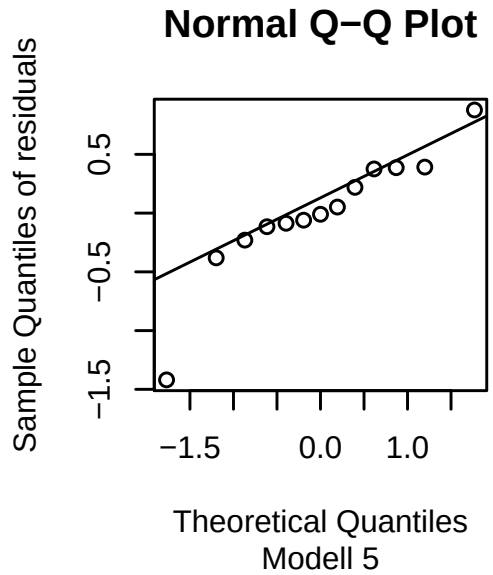
Ergebnis

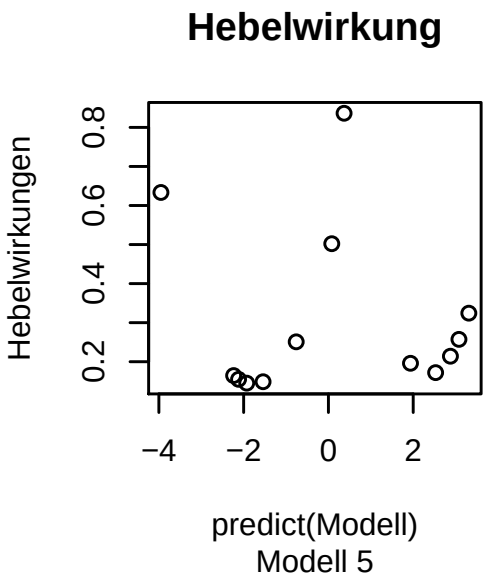
Interaktion wird nicht benötigt.

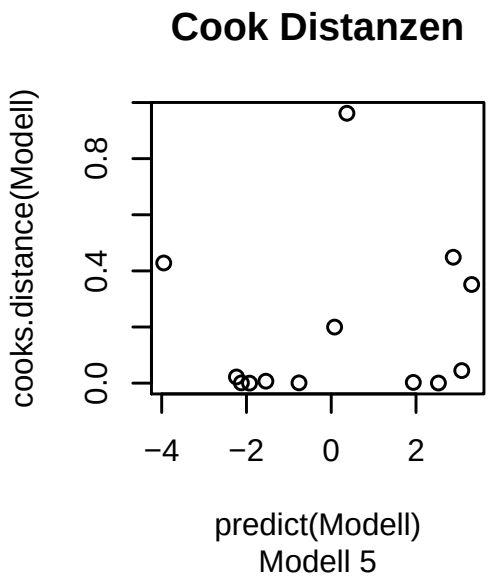
Diagnostik mit Interaktion

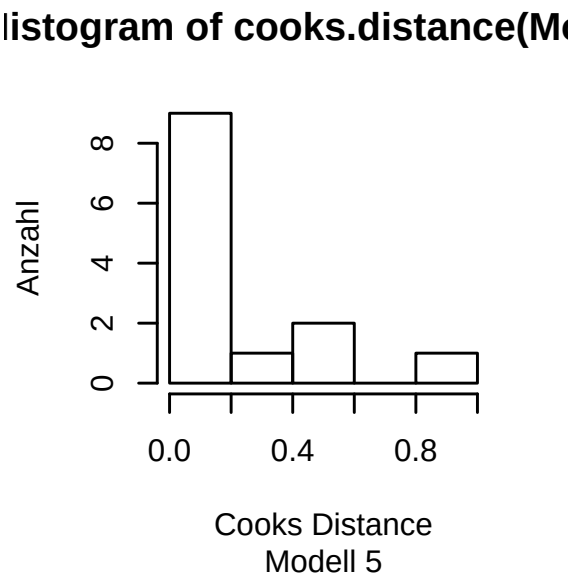




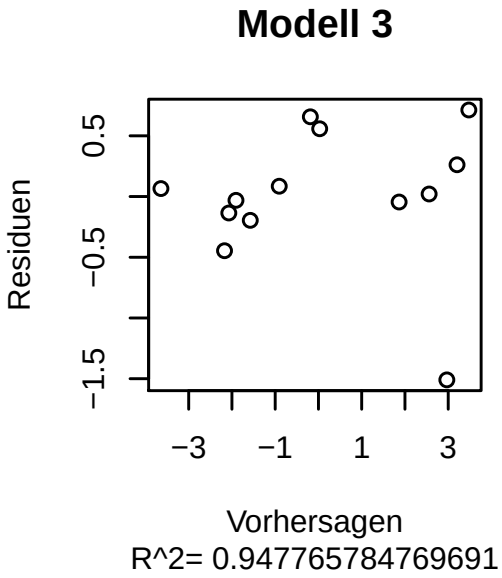


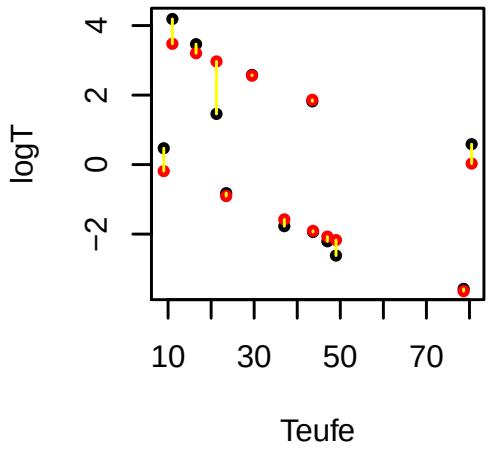


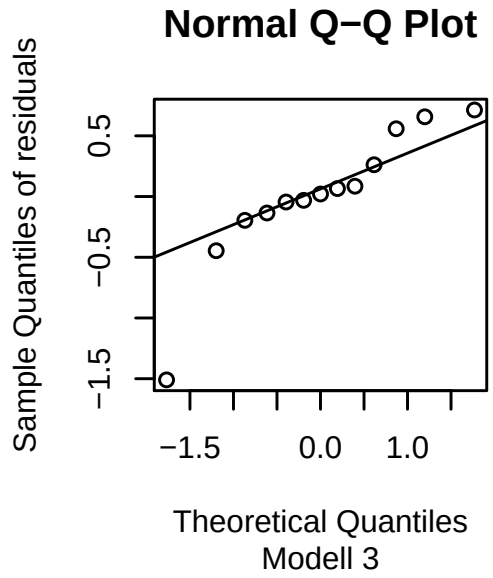


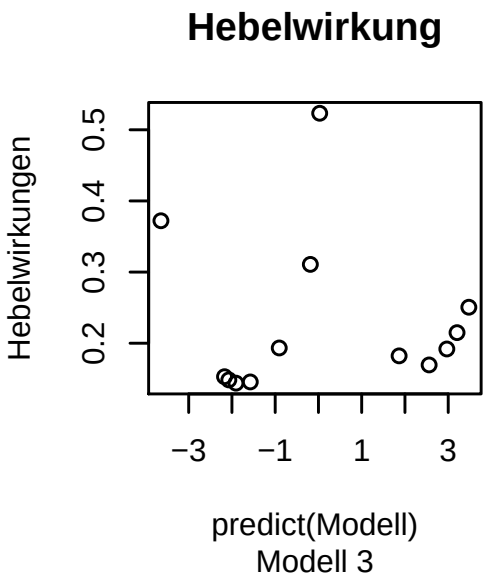


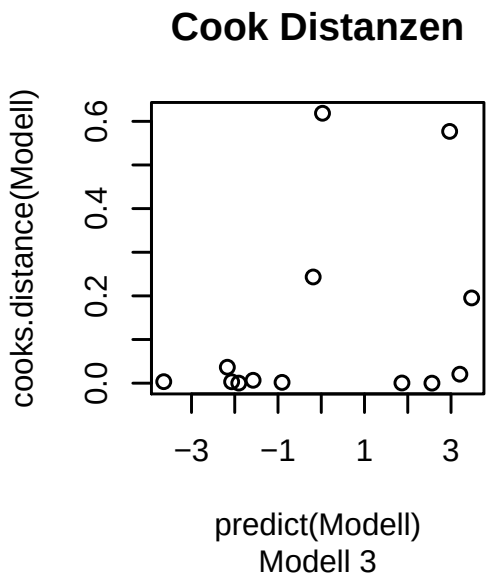
Diagnostik ohne Interaktion

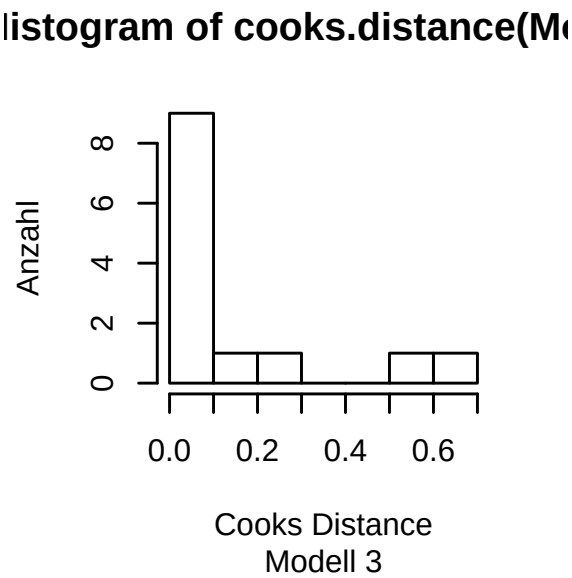












Robuste Schätzung

Die Robuste Methodik kann auch hier angewendet werden.

. . . und mit robuster Schätzung

```
> Auswertung(logT~Teufe*Type,Aqui,"Modell 6",robust=TRUE)

R^2= 0.9467

Terms added sequentially (first to last)

             Chisq Df RobustF Pr(F)
(Intercept)        1
Teufe              1     3.9 0.043
Type               1    58.6 6e-15
Teufe:Type         1     0.4 0.514
Estimated Parameters of the model:
    (Intercept)           Teufe       TypePoren
       4.310786       -0.049231       -3.711659
Teufe:TypePoren
      -0.008636
```

Diagnostik (robust)